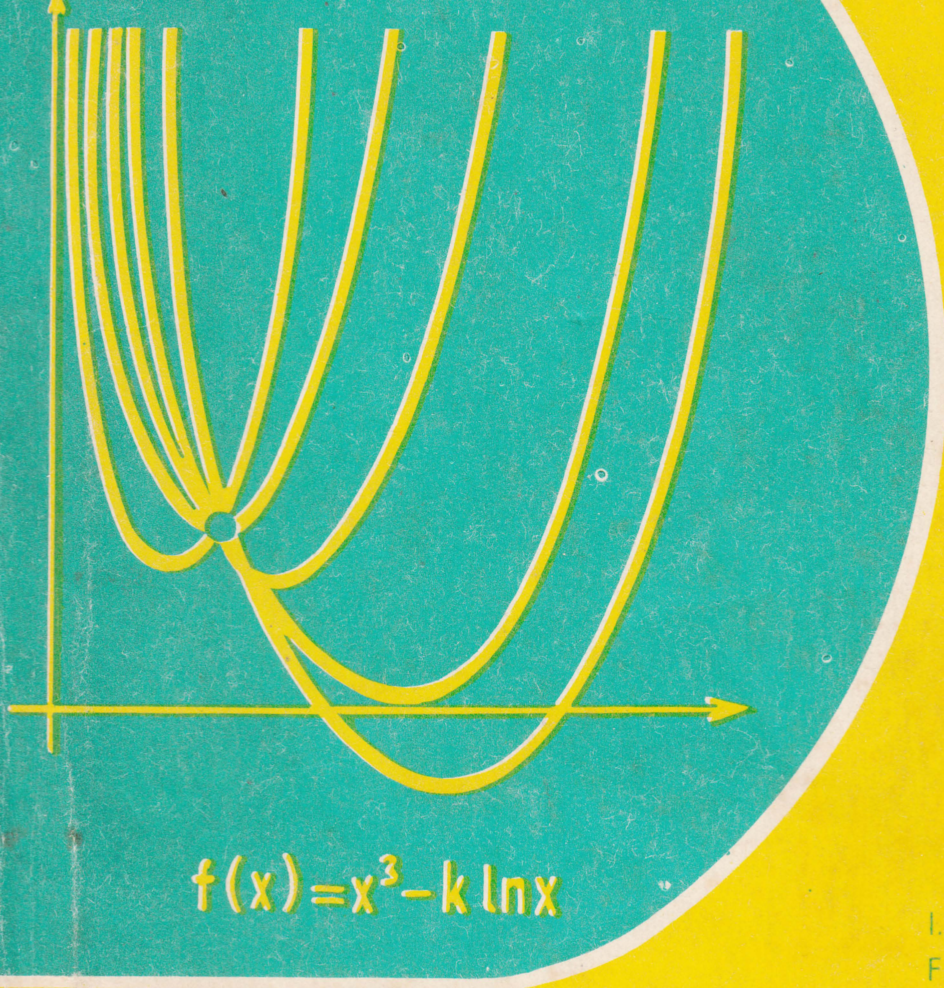


I. GIURGIU
F. TURTOIU

Culegere de probleme de matematică

pentru treapta a II-a de licee

I. GIURGIU F. TURTOIU

Culegere de probleme de matematică

pentru treapta a II-a de licee



EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ – BUCUREŞTI, 1981

Referenţi : Asistent **L. Panaitopol**
Prof. **E. Stătescu**
Prof. **V. Tomuleanu**

Redactor : Prof. *Valentin Radu*
Tehnoredactor : *Ana Ţimpău*
Grafician cop. : *D-tru Negrescu*

PREFAȚĂ

Lucrarea de față se adresează îndeosebi elevilor din clasele XI—XII, sau absolvenților liceelor, putînd fi folosită — parțial — și de elevii din clasele IX—X (capitolele I și II).

Scopul principal urmărit în lucrare este de a sprijini pe elevi într-o mai bună fundamentare a noțiunilor teoretice dobîndite în școală, precum și într-o mai temeinică pregătire în vederea susținerii examenelor de bacalaureat, de admitere în învățămîntul superior, sau alte concursuri.

Materialul propus, cuprinzînd circa 800 de exerciții și probleme, este grupat în trei părți : algebră *(determinanți — matrice — sisteme liniare, polinoame și ecuații de grad* $\geqslant 3$*, structuri algebrice)* ; analiză *(șiruri — limite de șiruri, limite de funcții — continuitate, derivate — reprezentări grafice, integrale)* și geometrie analitică.

În cadrul fiecărui capitol problemele urmăresc pe cît este posibil programa analitică în vigoare și, de regulă, pe grade de dificultate.

S-au propus și cîteva exerciții care depășesc cunoștințele de liceu, acestea fiind însoțite însă de rezolvări complete, din care rezultă teoria avută în vedere.

Rezolvarea multor probleme din cele propuse se poate face paralel cu desfășurarea programei analitice — pe anii respectivi — dar, unele probleme necesită cunoștințele teoretice de matematică dobîndite în anii de liceu.

În afară de materialul selecționat din diferite lucrări de specialitate (din țară și străinătate), din broșurile cu probleme de pregătire a elevilor pentru admitere în învățămîntul superior (I. P. Buc., A.S.E. Buc., I. C-ții Buc. ș.a.) și Gazeta matematică, am folosit într-o măsură corespunzătoare și material original lucrat cu elevii la clasă, sau la orele de pregătire la diferite trepte de examene. În alegerea materialului am ținut seama de noua structură a învățămîntului liceal, prezentînd într-o mare măsură (aproape 80%) exerciții și probleme legate de noile discipline tehnice introduse în toate liceele cu profil de matematică-fizică, matematică-mecanică (rezistența materialelor, organe de mașini etc.), punînd în general accent pe formarea unei abilități de calcul a elevilor.

Atragem atenția că la unele exerciții (operații cu funcții) nu am prevăzut în text, sau rezolvare, domeniile de aplicabilitate ale operațiilor indicate, iar în răspunsurile de la calculul integralelor nu am adăugat constantele de integrare, acestea rămînînd în atenția rezolvitorilor.

De asemenea, menționăm că soluțiile sau indicațiile date în rezolvare nu sînt limitative.

Atît în îmbunătățirea formei de prezentare, cît și în eliminarea unor neconcordanțe, am fost sprijiniți de referenții de specialitate ai lucrării, cărora le aducem mulțumiri.

AUTORII

Partea I

Algebra

Capitolul I

Determinanţi, matrice, sisteme liniare

A. Determinanţi

Să se calculeze determinanţii:

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 10 \\ 4 & 5 & -2 & 9 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 12 & -16 & 21 \end{vmatrix}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

R. $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$.

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a(-a+b+c) & b(a-b+c) & c(a+b-c) \\ \dfrac{1}{-a+b+c} & \dfrac{1}{a-b+c} & \dfrac{1}{a+b-c} \end{vmatrix}$.

R. 0.

3. $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$;

R. Se adună liniile a doua şi a treia la prima şi se scoate în factor $a + b + c$, apoi se scade coloana întîi din celelalte. Se obţine $\Delta = (a + b + c)^3 = (\Sigma a)^3$.

Notă. În cele ce urmează se vor folosi prescurtat simbolurile Σa în loc de $(a + b + c + \dots)$ Σab în loc de $(ab + ac + ad + \dots + bc + bd + \dots)$, Σa^2 în loc de $(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)$ etc.

4. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 + c^2 & c^2 + a^2 & a^2 + b^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 + c^2 & c^2 + a^2 & a^2 + b^2 \\ a(b + c) & b(c + a) & c(a + b) \end{vmatrix}.$$

R. În ambii determinanţi se adună linia a doua la linia întîi şi se scoate în factor Σa^2; apoi se scade coloana întîi din celelalte două, obţinîndu-se în final $\Delta_1 = -\Delta_2 = (a - b)(b - c)(c - a)\Sigma a \cdot \Sigma a^2$.

Altfel. Se descompun cei doi determinanţi în sumă de determinanţi.

5. $\Delta = \begin{vmatrix} (b + c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c + a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix}$.

R. Scăderi pe coloane.

Altfel. Prin consideraţii de omogenitate şi simetrie, observînd că Δ este un polinom $P(a, b, c)$ de gradul al şaselea, care pentru $a = 0$, $P(0, b, c) = 0$ şi deci

$$P(a, b, c) = abcQ(a, b, c). \tag{1}$$

Întrucît $P(a, b, c)$ nu se anulează pentru $a = b$ sau $a = -b$, rezultă că

$$Q(a, b, c) = k_1\Sigma a^3 + k_2\Sigma a^2 b + k_3 abc. \tag{2}$$

Înlocuind (2) în (1) şi particularizînd succesiv pe a, b, c prin valori numerice obţinem $k_1 = 2$, $k_2 = 6$, $k_3 = 12$ şi deci $\Delta = P(a, b, c) = 2abc(a + b + c)^3$.

6. $\Delta = \begin{vmatrix} (b + c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c + a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix}$.

R. Scăderi pe coloane; se obţine în final

$$\Delta = 2(ab + bc + ca)^3.$$

7. $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a(b + c) & b(c + a) & c(a + b) \\ b^2 + bc + c^2 & c^2 + ac + a^2 & a^2 + ab + b^2 \end{vmatrix}$.

R. $\Sigma a(\Sigma a^2 + \Sigma ab)(a - b)(b - c)(c - a)$.

8. $\Delta = \begin{vmatrix} (x + a)^2 & (y + b)^2 & (z + c)^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (x - a)^2 & (y - b)^2 & (z - c)^2 \end{vmatrix}$.

R. Se înmulţesc coloanele, respectiv b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2; apoi se scade coloana întîi din a doua şi aceasta din a treia etc. Se obţine

$$\Delta = 4(ay - bx)(bz - cy)(cx - az),$$

9. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$.

R. Se adună coloana întîi la cea de a treia şi apoi se transformă sumele în produse; se obţine $\Delta = 0$.

10. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \frac{1}{a_1 + b_3} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \frac{1}{a_2 + b_3} \\ \frac{1}{a_3 + b_1} & \frac{1}{a_3 + b_2} & \frac{1}{a_3 + b_3} \end{vmatrix}.$$

R. Se înmulţesc cele trei linii ale determinantului respectiv prin produsele: $(a_1 + b_1)(a_1 + b_2)(a_1 + b_3)$, $(a_2 + b_1)(a_2 + b_2)(a_2 + b_3)$, $(a_3 + b_1)(a_3 + b_2)(a_3 + b_3)$ şi determinantul respectiv devine

$$D \cdot P = \begin{vmatrix} (a_1 + b_2)(a_1 + b_3) & (a_1 + b_1)(a_1 + b_3) & (a_1 + b_1)(a_1 + b_2) \\ (a_2 + b_2)(a_2 + b_3) & (a_2 + b_1)(a_2 + b_3) & (a_2 + b_1)(a_2 + b_2) \\ (a_3 + b_2)(a_3 + b_3) & (a_3 + b_1)(a_3 + b_3) & (a_3 + b_1)(a_3 + b_2) \end{vmatrix}, \quad (1)$$

unde P reprezintă produsul celor 9 factori cu care s-a înmulţit D.

Se observă că membrul al doilea din egalitatea (1) este un polinom simetric şi omogen de gradul 6 în raport cu nedeterminatele $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Astfel fiind, calculul determinantului din (1) se face prin consideraţiuni de omogenitate şi simetrie. Într-adevăr, se observă că dacă $a_1 = a_2$ sau $b_1 = b_2$ determinantul are valoarea zero, aşa încît — din motive de simetrie, putem scrie:

$D \cdot P = k(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(b_1 - b_2)(b_2 - b_3)(b_3 - b_1)$ unde k se determină particularizînd nedeterminatele din componenţa determinantului. Se găseşte $D = 1$.

Să se calculeze determinanţii:

11. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1 & x & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & x \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & x & x^2 \end{vmatrix}$.

Să se găsească o relaţie între Δ_1 şi Δ_2.

R. $\Delta_1 = \Delta_2(\Delta_2 + 4)$.

12. $\Delta = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x \\ x+2 & x+3 & x & x+1 \\ x-3 & x & x-1 & x-2 \end{vmatrix}$.

R. $\Delta = +96$.

13. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 & x-3 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x \\ x-2 & x-3 & x & x-1 \\ x-3 & x & x-1 & x-2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x+2 & x+3 & x+4 & x+5 \\ x+3 & x+4 & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

R. Adunări şi scăderi de linii şi coloane; obţinem: $\Delta_1 = 32(3 - 2x)$, $\Delta_2 = 0$.

14. $\Delta = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$.

R. Se scoate în factor $(2x + a + b)$, apoi scăderi de coloane:

$$\Delta = (b - a)^2[(a + b)^2 - 4x^2].$$

15. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$.

R. Pentru Δ_1: se adună toate liniile la prima şi se scoate în factor $(x + a + b + c)$; apoi se scade o coloană din celelalte. În determinantul obţinut astfel se adună linia a doua la prima şi cea de a treia la a doua, scoţîndu-se în factor $(x + a - b - c)$ şi $(x + c - a - b)$. În final, obţinem:

$$\Delta_1 = (x + a + b + c)(x + a - b - c)(x + b - c - a)(x + c - a - b).$$

Δ_2 se obţine din Δ înlocuind pe x cu $-x$; avem:

$$\Delta_2 = (x - a - b - c)(x - a + b + c)(x + a - b + c)(x + a + b - c).$$

16. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & a+b & a \\ a+b+c & 1 & a & a+b \\ a+b & a & 1 & a+b+c \\ a & a+b & a+b+c & 1 \end{vmatrix}$.

R. Se adună liniile a doua, a treia şi a patra la linia întîi şi se scoate în factor $(3a + 2b + c + 1)$; apoi scăderi de coloane. Se obţine:

$$\Delta = (3a + 2b + c + 1)(a + 2b + c - 1)(a + c - 1)(-a + c + 1).$$

17. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

R. Se adună toate liniile la prima şi se scoate în factor $a + b + c$; apoi scăderi de coloane. Se obţine:

$$\Delta = -(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

18. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$;

R. Scăderi de coloane. Se obține:

$$\Delta = -(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c);$$

19. $\Delta = \begin{vmatrix} a^3 & 3a & 3a & 1 \\ a^2 & a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ a & 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

R. $\Delta = (a - 1)^3(a^2 - 1)$.

20. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

unde ω este o rădăcină cubică complexă a unității.

R. La primul determinant se adună mai întîi toate liniile la prima, ținîndu-se seama că $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ și că $\omega^3 = 1$; (1) apoi scăderi de coloane.

Altfel. Înmulțind primul determinant prin el însuși se obține — ținînd seamă de (1) — tocmai determinantul al doilea.

Altfel. Primul determinant se dezvoltă după regula lui *Laplace* și avem

$$= \begin{vmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \omega^2 \\ \omega & \omega^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & \omega^3 \\ \omega & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega^3 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega \\ \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \omega & \omega^3 \\ \omega^2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega^2 & 1 \\ \omega^3 & \omega \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^3 & 1 \end{vmatrix} = 3(\omega - \omega^2) \text{ și}$$

deci $\Delta^2 = 9(\omega - \omega^2)^2 = -27$.

Dezvoltînd cel de-al doilea determinant se obține aceeași valoare.

21. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos^3 a & \cos^2 a & \cos a \\ \cos^3 a & 1 & \cos a & \cos^2 a \\ \cos^2 a & \cos a & 1 & \cos^3 a \\ \cos a & \cos^2 a & \cos^3 a & 1 \end{vmatrix}$;

R. Se adună toate liniile la prima și se scoate în factor $(1 + \cos a)(1 + \cos^2 a)$; apoi, scăderi de coloane. Se obține $\Delta = \sin^3 a(1 + \cos^2 a)^2$.

22. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & \cos^2 a & \cos^3 a \\ \cos a & \cos^2 a & \cos^3 a & 1 \\ \cos^2 a & \cos^3 a & 1 & \cos a \\ \cos^3 a & 1 & \cos a & \cos^2 a \end{vmatrix}.$

R. Adunări şi scăderi de linii şi coloane; se obţine $\Delta = -\sin^6 a(1 + \cos^2 a)^3$.

23. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin 3a & \sin 2a & \sin a \\ \sin 3a & 1 & \sin a & \sin 2a \\ \sin 2a & \sin a & 1 & \sin 3a \\ \sin a & \sin 2a & \sin 3a & 1 \end{vmatrix};$

R. Se adună liniile a doua, a treia şi a patra la linia întîi şi se scoate în factor $(\sin 3a + \sin 2a + \sin a + 1)$; apoi se scade coloana întîi din celelalte, iar în determinantul rămas se scade coloana a doua din coloana întîi, iar la aceasta din urmă se adaugă coloana a treia, scoţîndu-se în factor $1 - \sin a + \sin 2a - \sin 3a$ etc.

În final se obţine:

$\Delta = [(1 + \sin 2a)^2 - (\sin a + \sin 3a)^2] [(1 - \sin 2a)^2 - (\sin a - \sin 3a)^2]$.

24. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin a & \sin 2a & \sin 3a & 1 \\ \sin 2a & \sin 3a & 1 & \sin a \\ \sin 3a & 1 & \sin a & \sin 2a \end{vmatrix}.$

R. Procedeu asemănător ca la exerciţiul anterior; obţinem:

$\Delta = [(\sin a + \sin 3a)^2 - (1 + \sin 2a)^2] [(\sin a + \sin 3a)^2 + (1 - \sin 2a)^2]$.

25. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a & \cos 5a \\ \cos 3a & \cos 4a & \cos 5a & \cos 6a \end{vmatrix}.$

R. $\Delta = 0$

26. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & \dots & n! \\ 2! & 2! & 3! & \dots & n! \\ 3! & 3! & 3! & \dots & n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n! & n! & n! & \dots & n! \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[1!\,2!\dots n!].$$

R. Scădem linia întîi din celelalte şi ţinem seama de relaţia $p! - (p-1)! = (p-1)(p-1)!$ şi de faptul că dezvoltînd determinantul după elementele ultimei coloane, elementele de o parte a diagonalei principale sînt nule.

Să se calculeze determinanţii:

27. $D_n = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & \dots & n! \\ 2! & 3! & 4! & \dots & (n+1)! \\ 3! & 4! & 5! & \dots & (n+2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & \dots & (2n-1)! \end{vmatrix};$

R. Dăm în factor, pe linii, respectiv pe $1!, 2!, 3!, \ldots, n!$, iar pe coloane, începînd de la a doua, pe $1!, 2!, \ldots, (n-1)!$ şi ţinînd seamă că $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$, determinantul se scrie:

$$D_n = [1!, 2!, \ldots, (n-1)!]^2 n! \begin{vmatrix} 1 & C_2^1 & C_3^1 & \ldots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \ldots & C_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & C_{n+1}^n & C_{n+2}^n & \ldots & C_{2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

În acest ultim determinant scădem linia întîi din a doua, aceasta din a treia etc., valoarea acestuia fiind 1.

Altfel. Din coloana de ordinul k scoatem în factor pe $k!$ Obţinem $D_n = 1!, 2!, \ldots, n! \Delta_n$. În Δ_n scădem coloana întîi din a doua, aceasta din cea de a treia etc Dezvoltăm apoi după elementele primei linii şi dînd în factor pe 2 din linia a doua, pe 3 din linia a treia etc., obţinem

$$\Delta_n = (n-1)!\, \Delta_n'.$$

Procedăm la fel cu Δ_n', în care dînd succesiv în factor pe $(n-2)!, (n-3)!, \ldots, 4!, 3!, 2!$, ultimul determinant va fi egal cu 1 şi deci

$$\Delta_n = 1!, 2!, \ldots, (n-1)!$$

Prin urmare, $D_n = [1!, 2!, \ldots, (n-1)!]^2 n!$

28. $$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & x & x & \ldots & x \\ x & -1 & x & \ldots & x \\ x & x & -1 & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & x & \ldots & -1 \end{vmatrix};$$

R. Scădem prima coloană din celelalte şi dăm în factor pe $(x+1)^{n-1}$. În noul determinant, adunăm la prima coloană pe toate celelalte coloane înmulţite cu x etc. Găsim:

$$\Delta = (-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}[(n-1)x - 1]$$

Altfel. Se scade linia întîi din toate celelalte, apoi se adună toate coloanele la prima coloană. Se obţine un determinant cu toate elementele nule, afară de diagonala principală.

29. $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

stabilindu-se o relaţie de recurenţă între Δ_n şi Δ_{n-1}.

R. $\Delta_n = 2^{n-1} + \Delta_{n-1}$ şi $\Delta_n = 2^n - 1$

30. Să se arate că dacă $n > 3$, determinantul

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \ldots & (n+2)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \ldots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$$

este nul, iar dacă $n = 4$, determinantul

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & \dots & (n+1)^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & \dots & (n+2)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^3 & (n+1)^3 & (n+2)^3 & \dots & (2n-1)^3 \end{vmatrix}$$

este egal cu 6^4 și pentru $n > 4$ este nul. Generalizare.

R. Se scade linia întîi din a doua, aceasta din a treia. În determinantul nou obținut facem aceleași operații. Se va ajunge la un determinant care va avea două linii identice.

Generalizare. Dacă $n > p + 1$, determinantul circulant $\Delta_p = |1^p 2^p 3^p \dots n^r|$ este nul (p este întreg și pozitiv).

31. Să se arate că

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & C_p^1 & C_p^2 & \dots & C_p^{n-1} \\ 1 & C_{p+1}^1 & C_{p+1}^2 & \dots & C_{p+1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{p+n-1}^1 & C_{p+n-1}^2 & \dots & C_{p+n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

R. Se scade linia întîi din a doua, aceasta din a treia etc. Se va dovedi ușor că $\Delta_n = \Delta_{n-1}$ și cum $\Delta_2 = 1$, concludem că $\Delta_n = 1$

Să se calculeze determinanții

$$\text{32. } \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

R. Dezvoltăm după elementele primei coloane și avem

$$\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}.$$

Calculînd pe Δ_2 și Δ_3, avem:

$$\Delta_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}, \quad \Delta_3 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$$

și analog vom avea

$$\Delta_{n-2} = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}; \quad \Delta_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ și deci } \Delta_n \text{ devine}$$

$$\Delta_n = (\alpha + \beta)\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Altfel. Se consideră determinantul dat ca suma a doi determinanți d_n și δ_n. Se va observa că $d_n = \alpha d_{n-1}$ și că $d_{n-1} = \alpha^{n-1}$, deoarece avem $d_2 = \alpha^2$ și $d_3 = \alpha^3$, iar $\delta_n = \beta\Delta_{n-1}$.

33. $\Delta_n = \begin{vmatrix} -2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2\cos\varphi \end{vmatrix}$.

Să se arate că există o relație de recurență între Δ_n, Δ_{n-1} și Δ_{n-2}.

R. Se ține seama de exercițiul precedent și se observă că

$$\alpha + \beta = -2\cos\varphi \quad \alpha\beta = 1.$$

Din acest sistem scoatem $\alpha, \beta = -\cos\varphi \pm i\sin\varphi$ și deci, conform rezultatului de la exercițiul precedent avem

$$\Delta_n = \frac{(-\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} - (-\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n+1}}{2i\sin\varphi} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Relația de recurență este $\Delta_n + 2\cos\varphi\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} = 0$.

B. Matrice

1. Se dă matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ și se cere să se calculeze A^2, A^3, A^4 și să se deducă prin inducție matricea A^n.

R. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$, $A^3 = A^2A = -IA = -A$, $A^4 = I$ de unde rezultă că $A^{4p} = I$, $A^{4p+1} = A$ etc.

2. Se consideră matricea $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ și se cere:

1°. Din calculul matricelor M^2 și M^3 să se deducă prin inducție M^n.

2°. Să se arate că înlocuind pe n cu $-n$ avem $M^{-n} = (M^{-1})^n$ și că $M^n M^{-n} = M^{-n}M^n = I$ (matricea unitate).

R. 1° $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Prin inducție $M^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Se verifică ușor și punctul 2° observînd că $M^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Se consideră matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \sin a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

și se cere să se calculeze A^n și B^n.

R. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n\cos a & 1 \end{bmatrix}$; pentru B^n se va observa că $B^2 = \sin a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \sin a \cdot I$, $B^3 = (\sin a)I \cdot B = (\sin a)B$,

$B^4 = (\sin a)B \cdot B = (\sin a)B^2 = (\sin^2 a)I$, $B^5 = (\sin^2 a)I \cdot B = (\sin^2 a)B$,
$B^6 = (\sin^3 a)B \cdot B = (\sin^3 a)I$ etc., deci dacă $n = 2k$, atunci
$B^n = (\sin^{n/2} a)I$, iar dacă $n = 2k + 1$, atunci

$$B^n = \left(\sin^{\frac{n-1}{2}} a\right)$$

4. Se dau matricele $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

şi se cere să se calculeze A^n şi B^n.

R. $A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$; pentru cea de a doua matrice se va observa că: $B^2 =$

$$= \begin{bmatrix} a & a \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} a & a^2 + a \\ a+1 & 2a+1 \end{bmatrix},$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} a^2 + a & 2a^2 + a \\ 2a+1 & a^2 + 3a + 1 \end{bmatrix}, \quad B^5 = \begin{bmatrix} a(2a+1) & a(a^2+3a+1) \\ a^2 + 3a + 1 & 3a^2 + 4a + 1 \end{bmatrix},$$

$$B^6 = \begin{bmatrix} a(a^2 + 3a + 1) & a(3a^2 + 4a + 1) \\ 3a^2 + 4a + 1 & a^3 + 6a^2 + 5a + 1 \end{bmatrix}$$ şi în definitiv vom avea:

$$B^n = \begin{bmatrix} C^0_{n-2}a + C^1_{n-3}a^2 + C^2_{n-4}a^3 + \ldots & a(C^0_{n-1} + C^1_{n-2}a + C^2_{n-3}a^2 + \ldots) \\ C^0_{n-1} + C^1_{n-2}a + C^2_{n-3}a^2 + \ldots & C^0_{n-2} + C_{n-2}a^2 + C^1_{-4}a^3 + \ldots \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dacă se consideră coeficienţii din dezvoltarea binomului $(1 + a)^n$, se poate trage concluzia asupra legii de formare a termenilor matricei, urmărind liniile punctate din triunghiul lui *Pascal*

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

Indicăm rezolvitorilor verificarea rezultatului de la (1) prin metoda inducţiei matematice.

5. Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ şi se cere să se găsească matricea A^n.

R. Se va observa că:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & -a \\ -1 & a+1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -a & a(a+1) \\ a+1 & -(2a+1) \end{bmatrix},$$

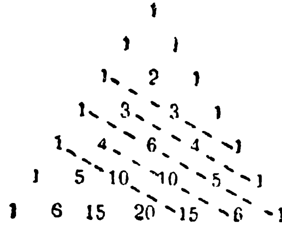
$$A^4 = \begin{bmatrix} a(a+1) & -a(2a+1) \\ -a(2a+1) & a^2 + 3a + 1 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} -a(2a+1) & a(a^2 + 3a + 1) \\ a^2 + 3a + 1 & -(3a^2 + 4a + 1) \end{bmatrix},$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} a(a^2 + 3a + 1) & -a(3a^2 + 4a + 1) \\ -a(3a^2 + 4a + 1) & a^3 + 6a^2 + 5a + 1 \end{bmatrix}$$ ş.a.m.d.

In concluzie vom avea

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^{2k+1}a(C_{n-1}^0 + C_{n-3}^1 a + \dots) & (-1)^{2k+2}a(C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 a + C_{n-3}^2 a^2 + \dots) \\ (-1)^{2k+2}(C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 a + \dots) & (-1)^{2k+2}(C_n^0 + C_{n-1}^1 a + C_{n-2}^2 a^2 + \dots) \end{bmatrix}.$$

Dacă se consideră coeficienții din dezvoltarea binomului $(1 + a)^n$, legea de obținere a elementelor matricei A^n rezultă urmărind liniile punctate în triunghiul lui *Pascal*.



Rezultatul obținut se va putea verifica prin inducție

6. Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ și se cere să se calculeze A^2, A^3, A^4 și prin inducție să se deducă matricea A^n.

R. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 + a & 2a \\ 2 & 1 + a \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 + 3a & a(3 + a) \\ 3 + a & 1 + 3a \end{bmatrix}$,

$A^4 = \begin{bmatrix} 1 + 6a + a^2 & a(4 + 4a) \\ 4 + 4a & 1 + 6a + a^2 \end{bmatrix}$ și este ușor de observat că coeficienții lui a ai elementelor matricei, fie pe coloane fie pe linii nu sînt altceva decît coeficienții binomiali din dezvoltarea $(1 + a)^n$. Astfel avem

$$A^n = \begin{bmatrix} C_n^0 + C_n^2 a + C_n^4 a^2 + \dots & a(C_n^1 + C_n^3 a + C_n^5 a^2 + \dots) \\ C_n^1 + C_n^3 a + C_n^5 a^2 + \dots & C_n^0 + C_n^2 a + C_n^4 a^2 + \dots \end{bmatrix}.$$

7. Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ și se cere să se calculeze A^n.

R. Se va observa că

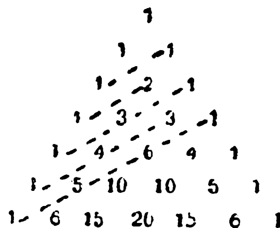
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 + 1 \\ 1+1 & -(1 + 2) \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 + 1 & -(1 + 2) \\ -(1 + 2) & (1 + 3 + 1) \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} -(1 + 2) & (1 + 3 + 1) \\ (1 + 3 + 1) & -(1 + 4 + 3) \end{bmatrix},$$

și că în definitiv avem:

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n (C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 + \dots) & (-1)^{n-1} (C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots) \\ (-1)^{n-1}(C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \dots) & (-1)^n(C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots) \end{bmatrix}.$$

Dacă se urmăresc liniile punctate din triunghiul lui *Pascal* de mai jos, se pot trage concluzii asupra legii de formare a elementelor componente ale matricei A^n.



8. Se consideră matricele:

$$A(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, \quad B(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}, \quad C(c) = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde $a, b, c \in R$ și $a \neq 0$.

Se notează $X = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ cu $m, n, p, q \in R$.

Se cere să se arate că pentru a avea

$$X = A(a)\ B(b)\ C(c) \qquad (1)$$

trebuie și este suficient să avem și $mq - np = 1$, iar descompunerea lui X sub forma din (1) este unică.

Notăm cu $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ și se cere să se arate că dacă $m = 0$ și $mq - np = 1$, atunci avem

$$X = A(a)\ B(b)\ Y. \qquad (2)$$

R. Efectuînd produsul matricelor din membrul al doilea din (1) și apoi identificînd, obținem ecuațiile:

$$m = a, \quad n = ac, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{bc + 1}{a} \qquad (3)$$

din care rezultă: $a = m$, $b = mp$, $c = \frac{n}{m}$, ultima ecuație din (3) conducînd la condiția din enunț, adică $mq - np = 1$, soluția fiind unică.

În cazul în care $m = 0$ descompunerea din (2) conduce la $a = n = -\frac{1}{p}$, $b = nq$, ceea ce conduce la $np = -1$ sau $mq - np = 1$ căci $m = 0$.

9. Să se determine toate matricele pătratice A de ordinul doi care verifică relația $A^2 = I$, unde I este matricea unitate de același ordin.

Se notează cu $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ și se cere ca din mulțimea matricelor A să se determine acelea care anticomută cu A_1, adică $AA_1 = -A_1A$.

R. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ și $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + bd \end{bmatrix}$

trebuie să avem $a^2 + bc = 1$, $bc + d^2 = 1$, $ab + bd = 0$, $ac + cd = 0$. Din aceste patru ecuații se deduc

1) $b = c = 0$, $a = \pm 1$, $d = \pm 1$, corespunzător obținîndu-se patru matrice diagonale I, $-I$, A_1 și $-A_1$.

2) $a + d = 0$, $bc = 1 - a^2$, de unde rezultă matricele de forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{1 - a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Pentru a avea relația $AA_1 = -A_1A$, rezultă $a = 0$ și matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ \dfrac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}$

10. Se consideră matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$ și se cere să se determine o matrice $B \neq 0$, de același ordin cu A astfel încît să avem $AB = 0$ (A și B se spune că sînt divizori ai lui zero).

R. Notăm $B = \begin{bmatrix} b & c \\ d & e \end{bmatrix}$; efectuînd produsul și identificînd, obținem:

$$B = \begin{bmatrix} -2d & -2e \\ d & e \end{bmatrix} \text{ și } a = 6.$$

11. Se dă matricea

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

și se cere să se arate că această matrice se poate pune sub forma unei sume a două matrice: una fiind simetrică S_M a lui M și cealaltă antisimetrica A_M a lui M, adică $M = S_M + A_M$.

R. Din $M = S_M + A_M$ deducem: $M' = S'_M + A'_M = S_M - A_M$ și deci $2S_M = M + M'$, adică $S_M = \dfrac{M + M'}{2}$ și $A_M = \dfrac{M - M'}{2}$ (unde M', S', A' sînt matricele transpuse). În cazul de față avem:

$$M' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ și deci } S_M = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ și } A_M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

observîndu-se într-adevăr că $M = S_M + A_M$.

12. Aceeaşi chestiune pentru matricea

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

R. $M = S_M + A_M = \begin{bmatrix} -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

13. Se dau matricele:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că $(MN)' = NM$.

R. $MN = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 10 & 10 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 10 & 4 \\ 10 & 10 & 14 & 8 \end{bmatrix}.$

14. Se dau matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ şi } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1°. Să se arate că $(AB)' = BA$.

2°. Să se arate că produsul ABA **este o matrice de forma** A_1

R. $AB = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 8 & 14 \\ 14 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 14 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 14 & 8 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 14 & 8 \\ 8 & 6 & 8 & 14 \\ 14 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix},$

$ABA = \begin{bmatrix} 64 & 44 & 48 & 60 \\ 44 & 48 & 60 & 64 \\ 48 & 60 & 64 & 44 \\ 60 & 64 & 44 & 48 \end{bmatrix}.$

15. Să se determine matricea X, pentru care avem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R. Scriind pe $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$ efectuînd şi identificînd, obţinem trei sisteme de ecuaţii de cîte trei necunoscute.

Soluţia este:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că $A = B^{-1}$, $A' = B$, $A^{-1} = A'$ (unde A^{-1} şi B^{-1} sînt matricele inverse ale lui A şi B, iar A' este transpusa lui A).

17. 1°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

2°. Să se găsească o relaţie între x, y, z, independentă de a, b, c fără a rezolva sistemul.

R. 1°—2°. Efectuînd înmulţirile matricelor se obţine sistemul

$$\left.\begin{aligned} a(y+z) + b(z+x) + c(x+y) &= 2a \\ b(y+z) + c(z+x) + a(x+y) &= 2b \\ c(y+z) + a(z+x) + b(x+y) &= 2c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

care este echivalent cu:

$$\left.\begin{aligned} (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z &= 2a \\ (c+a)x + (a+b)y + (b+c)z &= 2b \\ (a+b)x + (b+c)y + (c+a)z &= 2c \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Rezolvînd (2) se obţine: $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$.

Din (1) sau (2) prin adunarea celor trei ecuaţii şi împărţire cu $\Sigma a \neq 0$ se obţine $\Sigma x = 1$.

C. Sisteme liniare: rezolvare şi discuţii

Să se rezolve sistemele:

1. $x + ay + a^2z + a^3 = 0,$

$x + by + b^2z + b^3 = 0,$

$x + cy + c^2z + c^3 = 0,$

cu a, b, c distincte între ele.

R. Se pot folosi formulele lui *Cramer*; obţinem:

$$x = -abc,\quad y = ab + bc + ca,\quad z = -(a + b + c).$$

Altfel. Se consideră polinomul

$$P(t) = t^3 + t^2 z + ty + x \tag{1}$$

şi potrivit ecuaţiilor sistemului avem: $P(a) = 0$, $P(b) = 0$, $P(c) = 0$. Cum polinomul (1) este de gradul al treilea, rezultă că rădăcinile acestuia sînt $t_1 = a$, $t_2 = b$, $t_3 = c$; avem deci

$$P(t) = t^3 + t^2 z + ty + x = (t - a)(t - b)(t - c),$$

sau dezvoltînd, rezultă

$$t^3 + t^2 z + ty + x \equiv t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc.$$

Identificînd coeficienţii se obţine

$$x = -abc,\quad y = ab + bc + ca,\quad z = -abc.$$

2.

$$x + ay + a^2 z + a^3 u + a^4 = 0,$$
$$x + by + b^2 z + b^3 u + b^4 = 0,$$
$$x + cy + c^2 z + c^3 u + c^4 = 0,$$
$$x + dy + d^2 z + d^3 u + d^4 = 0,$$

cu $a \neq b \neq c \neq 0$.

R. Se aplică metoda a doua din exerciţiul precedent; obţinem $x = abcd$, $y = -(bcd + acd + abd + abc)$, $z = \Sigma ab$, $u = -\Sigma a$.

3.

$$x + y + z + t = 0,$$
$$ax + by + cz + dt = 0,$$
$$a^2 x + b^2 y + c^2 z + d^2 t = 0,$$
$$a^3 x + b^3 y + c^3 z + d^3 t = k,$$ (*a, b, c, d* distincte între ele).

R. Se pot folosi formulele lui *Cramer*.

Altfel. Înmulţind primele trei ecuaţii respectiv cu r, p, q apoi adunăm toate cele patru ecuaţii formate şi punem condiţia ca în ecuaţia obţinută coeficienţii necunoscutelor y, z, t să fie nuli, rezultînd astfel dubla egalitate

$$r + qb + pb^2 + b^3 = r + qc + pc^2 + c^3 = r + qd + qd^2 + d^3 = 0, \tag{1}$$

şi ecuaţia $x(r + aq + a^2 p + a^3) = k.$ (2)

Ţinînd seamă de (1), putem considera că b, c, d sînt rădăcinile ecuaţiei

$$u^3 + pu^2 + qu + r = 0. \tag{3}$$

Astfel fiind, (3) se mai poate scrie sub forma

$$u^3 + pu^2 + qu + r = (u - b)(u - c)(u - d) \tag{3}$$

şi ecuaţia (2) care dă pe x se scrie sub forma

$$x(a - b)(a - c)(a - d) = k,$$

adică $x = \dfrac{k}{(a - b)(a - c)(a - d)}$.

Asemănător se obțin y, z, t.

Să se rezolve sistemele liniare:

4. $$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5, \\ 2x - 5y + 4z = 3, \\ 4x - y - 2z = 11. \end{cases}$$

R. $\Delta_s = 0$, $I = 2$, $\Delta_{car} \neq 0$ și deci sistemul este incompatibil (conform teoremei lui *Rouché*).

5. $$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x + 2y - 5z = 8, \\ 5x - y - z = 15. \end{cases}$$

R. $\Delta_s = 0$, $I = 2$, $\Delta_{car} = 0$, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat (*Rouché*) cu soluția generală

$$\left(\frac{38 + 7\lambda}{13}, \frac{22\lambda - 5}{13}, \lambda\right) \text{ cu } \lambda \in R.$$

6. $$\begin{cases} 3x + y + 2z = 8, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 5x + 9y + 4z = 22. \end{cases}$$

R. $\Delta_s = 0$, $\Delta_{car} = 0$; sistem compatibil simplu nedeterminat cu soluția $\left(\frac{25 - 7\lambda}{11}, \frac{13 - \lambda}{11}, \lambda\right)$ cu $\lambda \in R$.

7. $$\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= 1, \\ 7x - 3y + 5z &= -6, \\ 3x + y - 8z &= 15, \\ 6x + 5y + 11z &= -4. \end{aligned}$$

R. Sistem compatibil, deoarece $\Delta_{compl} = 0$.

8. $$\begin{aligned} 2x - 2y + z + 2u &= 1, \\ x + 2y - z + 3u &= -1, \\ -x + 3y + 2z + 4u &= 7, \\ 5x - 3z + 4u &= -8. \end{aligned}$$

R. rang (M_s) = rang $(M_{compl}) = 3$ și conform teoremei lui *Kronecker* sistemul este compatibil simplu nedeterminat, soluția generală fiind:

$$\left(-\frac{1 + 5\lambda}{4}, \frac{3 - 5\lambda}{4}, \frac{9 - 3\lambda}{4}, \lambda\right), \text{ cu } \lambda \in R.$$

9.
$$\begin{aligned} 2x - 2y + z - t + u &= 1,\\ x + 2y - z + t - 2u &= 1,\\ 4x - 10y + 5z - 5t + 7u &= 1,\\ 2x - 14y + 7z - 7t + 11u &= -1. \end{aligned}$$

R. Sistem compatibil triplu nedeterminat cu soluţia generală

$$\left(\frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+3\alpha-3\beta+5\gamma}{6}, \alpha, \beta, \gamma\right), \text{ cu } \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

10.
$$\begin{aligned} 2x - y + z - t + 2u &= 0,\\ x + 2y - 2z - t - u &= -2,\\ 4x - 7y + 7z - 5t + 8u &= 31,\\ -x + 8y - 8z + 5t - 7u &= -24,\\ 3x - 4y + 4z - 3t + 5u &= 20. \end{aligned}$$

R. Sistem compatibil triplu nedeterminat, cu soluţia generală

$$\left(\frac{16+\beta-3\gamma}{5}, \frac{-13+5\alpha-3\beta+4\gamma}{5}, \alpha, \beta, \gamma\right) \text{ cu } \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

Să se precizeze dacă sistemele liniare şi omogene ce urmează au şi soluţii diferite de zero (nebanale).

11.
$$\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 0,\\ 8x + 7y - 2z &= 0,\\ 2x - y + 8z &= 0. \end{aligned}$$

R. $\Delta_s = 0$ şi prin urmare sistemul are şi soluţii diferite de zero (nebanale). Se ia un $\Delta_p \neq 0$ de exemplu

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 ,$$

şi se rezolvă sistemul $3x + 4y = 5z$, $2x - y = -8z$, a cărui soluţie este $\left(-\frac{27}{11}\lambda, \frac{34}{11}\lambda, \lambda\right)$, cu $\lambda \in R$.

12.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0,\\ r_a x + r_b y + r_c z &= 0,\\ a r_a x + b r_b y + c r_c z &= 0, \end{aligned}$$

a, b, c, r_a, r_b, r_c fiind elementele cunoscute ale unui triunghi oarecare ABC.

R. Deoarece $\Delta_s = 0$, sistemul are şi soluţii diferite de zero; pentru $a \neq b \neq c$ soluţia sistemului este

$$\left(\frac{r_b - r_c}{r_a - r_b}\lambda, -\frac{r_a - r_c}{r_c - r_b}\lambda, \lambda\right), \text{ cu } \lambda \in R.$$

13. $$\begin{aligned} -x \quad &+ y\cos C + z\cos B = 0,\\ x\cos C - y \quad &+ z\cos A = 0,\\ x\cos B + y\cos A - z \quad &= 0, \end{aligned}$$

unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi oarecare.

R. $\Delta_s = \Sigma\cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C - 1$ şi cînd $A + B + C = 180°$, $\Delta s = 0$ şi sistemul admite şi soluţii diferite de zero.

14. $$\begin{aligned} 9x - 5y + 3z - 2u &= 0,\\ 7x + 2y - 5z + u &= 0,\\ 4x - y + 6z - 5u &= 0,\\ 15x + 7y - 11z + u &= 0. \end{aligned}$$

R. $\Delta_s = 0$, sistemul are şi soluţii nebanale, soluţia generală fiind $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda)$, cu $\lambda \in R$.

15. $$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0,\\ 4x + y + 4z + 3u &= 0,\\ 3x - 6y + z - u &= 0,\\ -x + 2y + z + u &= 0. \end{aligned}$$

R. $\Delta_s = 0$, soluţia generală este

$$\left(-\frac{1}{6}\lambda,\ -\frac{1}{3}\lambda,\ -\frac{1}{2}\lambda,\ \lambda\right) \text{ cu } \lambda \in R.$$

Să se discute natura soluţiilor sistemelor:

16. $$\begin{aligned} 2ax + y + z &= 0,\\ x + ay - z &= -1,\\ x + 2ay + z &= 1. \end{aligned}$$

unde a este un parametru real.

R. $\Delta_s = 6a^2 + a - 2$; dacă:

$a \notin \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ — sistemul este compatibil determinat;

$a \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ — sistemul este incompatibil.

17. $$\begin{aligned} x + my + 4z &= 1,\\ 3x - y + 5z &= -4,\\ mx - 5y - z &= -5, \end{aligned}$$

unde m este un parametru real.

R. $\Delta_s = 5m^2 + 7m - 34$ cu rădăcinile $m_1 = -\frac{17}{5}$ şi $m_2 = 2$, pentru care sistemul este incompatibil.

18. $(2a-1)x + y + z = 5,$

$$x + y + az = 5,$$
$$x + ay - z = 2,$$

unde a este un parametru real.

R. $\Delta_s = -2a^3 + a^2 + 1$; pentru $a = 1$ sistemul este compatibil nedeterminat avînd soluția $\left(\lambda, \frac{7-2\lambda}{2}, \frac{3}{2}\right)$, cu $\lambda \in R$, iar pentru $a \neq 1$ — sistem compatibil determinat.

19. $m^2x + my + mz = m + 5,$

$$mx + m^2y + mz = 2(m+2),$$
$$mx + my + m^2z = 3(m+1),$$

unde m este un parametru real.

R. $\Delta_s = m^3(m-1)^2(m+2)$; pentru $m \neq 0$ sistemul are soluția $x = \frac{1}{m}$, $y = \frac{2}{m}$, $z = \frac{3}{m}$; pentru $m = 0$ și $m = 1$ sistemul este incompatibil, iar pentru $m = -2$ este compatibil simplu nedeterminat, soluția fiind $\left(\frac{2m+7}{3} + \lambda, \frac{5m+13}{6} + \lambda, \lambda\right)$, unde $\lambda \in R$.

20. a) $3x + (3a-1)y - z = 1,$

$$2x - y - z = 3,$$
$$4x + (5a+1)y + (1-a)z = -4,$$

a fiind un parametru real.

R. $\Delta_s = 6a(a-2)$; pentru $a_1 = 0$ și $a_2 = 2$ sistemul este incompatibil.

b) $x - y - az = 1,$

$$ax + y + az = 1 - a,$$
$$ax + 3y + 3z = -1,$$

unde a este un parametru real.

R. $\Delta_s = -3(a^2-1)$; pentru $a = -1$ sistemul este incompatibil, iar pentru $a = 1$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluția $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2\lambda+1}{2}, \lambda\right)$, cu $\lambda \in R$.

21. $(3a-1)x + 2ay + (3a+1)z = 1,$

$$2ax + 2ay + (3a+1)z = b,$$
$$(a+1)x + (a+1)y + 2(a+1)z = b^2,$$

unde a și b sînt parametri reali.

R. $\Delta_s = (a+1)(a-1)^2$; pentru $a = -1$, avem $\Delta_{car} = 4b^2$, rezultînd din aceasta că dacă $b = 0$, $\Delta_{car} = 0$ și sistemul este compatibil simplu nedeterminat (teorema lui *Rouché*), iar dacă $b \neq 0$ sistemul este incompatibil. Pentru $a = 1$ sistemul devine

$$2x + 2y + 4z = 1,$$
$$2x + 2y + 4z = b,$$
$$2x + 2y + 4z = b^2,$$

rezultînd că dacă $b = 1$, sistemul este compatibil dublu nedeterminat iar pentru $b \neq 1$ sistemul este incompatibil.

22.
$$x + y + z = 1,$$
$$ax + by + cz = d,$$
$$(b^2 + bc + c^2)x + (c^2 + ca + a^2)y + (a^2 + ab + b^2)z = d^2.$$

R. Se va observa că rang $(M_s) = 2$, oricare ar fi a, b, c; în consecință sistemul poate fi incompatibil sau compatibil simplu nedeterminat.

Se presupune $a \neq b \neq c$ și se ia

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0, \qquad (1)$$

și se formează

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ b^2 + bc + c^2 & c^2 + ca + a^2 & d^2 \end{vmatrix},$$

din care se vede că Δ_{car} nu poate fi zero decît dacă $a = b$, ceea ce contravine condiției (1). Potrivit teoremei lui *Rouché*, determinantul caracteristic nefiind nul, rezultă că pentru $a \neq b \neq c$ sistemul este incompatibil.

23.
$$x + y + z = \alpha,$$
$$x \cos^2 a + y \cos^2 b + z \cos^2 c = \beta,$$
$$x \sin^2 a + y \sin^2 b + z \sin^2 c = \gamma.$$

R. $\Delta_s = 0$, oricare ar fi arcele a, b, c. Presupunînd însă $a \neq b$, se poate lua

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos^2 a & \cos^2 b \end{vmatrix} \neq 0$$

și condiția ca sistemul să fie compatibil este dată de

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \beta \\ \sin^2 a & \sin^2 b & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Dar Δ_{car} nu poate fi nul decît dacă $\alpha = \beta + \gamma$ (în care caz Δ_{car} are două linii egale), această condiție fiind îndeplinită, sistemul este compatibil nedeterminat.

24.
$$x + y + z + t = 10,$$
$$x + y - z - 2t = -8,$$
$$5x + 5y - z + at = -4,$$
$$x + y + 3z + 4t = 28.$$

R. Pentru $a \neq -4$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluția $(\alpha, 1 - \alpha, 9, 0)$, cu $\alpha \in R$; pentru $a = -4$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu soluția $(\beta - 3\alpha, 4 - \beta, 9\alpha, 6 - 6\alpha)$, cu $\alpha, \beta \in R$.

25.
$$\begin{aligned} mx + y + z + u &= 5, \\ x + y + mz - u &= 3, \\ 2x - y + z + mu &= 4, \\ x + y + z + u &= 2m. \end{aligned}$$

R. Pentru $m = 1$ sistemul este incompatibil iar pentru $m \neq 1$ este compatibil determinat şi se rezolvă cu formulele lui *Cramer*.

26.
$$\begin{aligned} x + y + z + mu &= 1, \\ x + y + mz + u &= m, \\ x + my + z + u &= m^2, \\ mx + y + z + u &= m^3. \end{aligned}$$

R. $\Delta = (m - 1)^3(m + 3)$; pentru $m \neq 1$ şi $m \neq -3$ sistemul este compatibil determinat şi se rezolvă cu formulele lui *Cramer*; pentru $m = -3$ sistemul este incompatibil iar pentru $m = 1$ sistemul este compatibil triplu nedeterminat.

Altfel. Adunînd cele patru ecuaţii, rezultă

$$x + y + z + u = \frac{1 + m + m^2 + m^3}{m + 3} \tag{1}$$

apoi ţinînd seama de prima ecuaţie a sistemului, din (1) rezultă u; asemănător se pot obţine şi celelalte necunoscute.

27.
$$\begin{aligned} x + m(y + z + t) &= a, \\ y + m(x + z + t) &= b, \\ z + m(x + y - t) &= c, \\ t + m(x + y - z) &= d. \end{aligned}$$

R. $\Delta = (1 - m^2)(1 - 5m^2)$; pentru $m = 1$ şi $a \neq b$ sistemul este incompatibil; pentru $m = 1$ şi $a = b$ sistemul este simplu nedeterminat, în care caz se poate lua

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0;$$

necunoscute principale x, z, t iar y necunoscută secundară (arbitrară).

Rămîne de rezolvat sistemul

$$\begin{aligned} x + z + t &= a - y, \\ x + z - t &= c - y, \\ x - z + t &= d - y, \end{aligned}$$

care conduce la soluţia $\left(\frac{c + d}{2} - y,\ y,\ \frac{a - d}{2},\ \frac{a - c}{2}\right)$, cu $y \in R$.

Pentru $m = -1$ se poate lua

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

necunoscute principale x, y, z iar t este arbitrar; ecuaţii principale sînt primele trei.

Sistemul

$$x - y - z = a + t,$$
$$-x + y - z = b + t,$$
$$-x - y + z = c - t$$

are soluția $\left(-\frac{b+c}{2} - \frac{a+c}{2},\ -\frac{a+b}{2} - t,\ -t\right)$, $t \in R$.

Să se discute soluțiile sistemelor liniare și omogene :

28.
$$ax + y + z = 0,$$
$$x + y - 2z = 0,$$
$$x + y + az = 0,$$

unde a este un parametru real.

R. Sistemul are și soluții diferite de zero (nebanale) dacă $\Delta_s = (a+2)(a-1) = 0$, pentru $a = 1$ avem soluția $(\lambda, -\lambda, 0)$, cu $\lambda \in R$, iar pentru $a = -2$ avem soluția (μ, μ, μ) cu $\mu \in R$.

29.
$$ax + 4y + 7z = 0,$$
$$2x + ay + 7z = 0,$$
$$x - 2y + az = 0.$$

R. $\Delta_s = a(a^2 - 1)$; pentru $\Delta_s \neq 0$ sistemul admite doar soluția banală ($x = y = z = 0$). Pentru $a_1 = 0$ avem soluția $\left(-\frac{7}{2}\lambda,\ -\frac{7}{4}\lambda,\ \lambda\right)$, pentru $a = 1$ avem soluția $(-3\lambda, -\lambda, \lambda)$ iar pentru $a = -1$ sistemul are soluția $(-5\lambda, -3\lambda, \lambda)$, cu $\lambda \in R$.

30.
$$(a+b)x + by + az = 0,$$
$$bx + (a+b)y + az = 0,$$
$$ax + by + (a+b)z = 0,$$

unde a, b sînt parametri reali.

R. $\Delta_s = 2ab(a+b)$, rezultînd din aceasta că pentru $a = 0$, $b = 0$ și $a = -b$ sistemul admite soluțiile nebanale $(\lambda, -\lambda, \lambda)$, $(\lambda, \lambda, -\lambda)$, $(\lambda, \lambda, \lambda)$, cu $\lambda \in R$.

31. Să se discute sistemul

$$x + y - z + 2t = 0,$$
$$ax + y + z + t = 0,$$
$$x - y + 3z - 3t = 0,$$
$$4x + 2y + at = 0.$$

R. Prin transformări elementare, matricea sistemului poate fi adusă la forma

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(a-3) & -2(a-3) \\ 0 & 0 & -3(a-3) & a-3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Din (1) rezultă că pentru $a = 3$, rang $(M_s) = 2$ şi sistemul este compatibil dublu nedeterminat, iar pentru $a \neq 3$, rang $(M_s) = 4$ şi sistemul admite doar soluţia banală $x = y = z = t = 0$.

32. Să se determine α astfel ca sistemul

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha y + z + t &= 0, \\ x + \alpha y + \alpha z + t &= 0, \\ x + y + \alpha z + \alpha t &= 0, \\ \alpha x + y + z + \alpha t &= 0 \end{aligned}$$

să admită şi soluţii nebanale, care se vor calcula.

R. Deoarece $\Delta_s = 0$ pentru $\forall \alpha \in R$, sistemul admite şi soluţii nebanale; cum rangul matricei sistemului este egal cu 3, rezultă că sistemul poate fi considerat compatibil simplu nedeterminat.

33. Să se discute soluţiile sistemului

$$\begin{aligned} x + 2y + az + au &= 0, \\ 2x + ay + az + u &= 0, \\ ax + ay + z + 2u &= 0, \\ ax + y + 2z + au &= 0, \end{aligned}$$

unde a este un parametru real.

R. Sistemul are şi soluţii diferite de zero (nebanale) dacă $a = -\frac{3}{2}$; pentru această valoare a lui a soluţia sistemului este $(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$, unde $\lambda \in R$.

34. Se consideră în spaţiul vectorial R^4 următorii vectori: $a_1(1, 2, 2, 1)$, $a_2(5, 6, 6, 5)$, $a_3(-1, -3, 4, 0)$, $a_4(0, 4, -3, -1)$. Se cere să se stabilească o relaţie de dependenţă între vectorii daţi.

R. Relaţia este (cel puţin unul din elementele α, β, γ, δ este nenul)

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta a_4 = 0 \tag{1}$$

sau ceea ce este echivalent cu sistemul

$$\begin{aligned} \alpha + 5\beta - \gamma &= 0, \\ 2\alpha + 6\beta - 3\gamma + 4\delta &= 0, \\ 2\alpha + 6\beta + 4\gamma - 3\delta &= 0, \\ \alpha + 5\beta - \delta &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Rangul sistemului (2) este $r = 3$ şi deci sistemul admite şi soluţii nebanale.

Considerăm un determinant principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0,$$

cu ecuații principale primele trei, necunoscute principale α, β, γ; necunoscuta secundară δ. Soluția sistemului (2) este

$$\left(-\frac{11}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \lambda, \lambda\right) \quad \text{unde } \lambda \in R.$$

Introducînd această soluție în (1), rezultă relația de dependență

$$-11a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 4a_4 = 0.$$

35. Aceeași problemă pentru vectorii

$$a_1(2, -5, 3, 10), \; a_2(1, -1, 1, 3), \; a_3(3, 3, 1, 1).$$

R. Procedeu analog ca la exercițiul precedent. Se găsește relația de dependență

$$2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0.$$

Capitolul II

Polinoame ; ecuații algebrice de grad ≥ 3

A. Polinoame

1. Care este condiția ca polinomul
$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$, cu coeficienți în R, să poată fi descompus în două polinoame de gradul întîi cu coeficienți în R ?

R. Se formează ecuația de gradul al doilea a, $ax^2 + 2(by + d)a + cy^2 + 2ey + f = 0$ și se pune condiția ca discriminantul acesteia să fie un pătrat perfect, rezultînd

$$(b^2 - ac)y^2 + 2(bd - ae)y + d^2 - af = k^2. \qquad (1)$$

În continuare, se pune condiția ca discriminantul ecuației (1) să fie nul, adică să avem

$(bd - ae)^2 - (b^2 - ac)(d^2 - af) = 0$, sau dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

2. Să se determine k astfel ca polinomul

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - k(x^2 + y^2)$$

să fie un pătrat perfect.

R. Ordonăm în raport cu x și avem

$$P(x, y) = (a - k)x^2 + 2bxy + (c - k)y^2.$$

Punem condiția ca discriminantul ecuației $P(x, y) = 0$ să fie zero și $(a - k)(c - k) > 0$.

3. Să se descompună în factori de gradul al doilea cu coeficienți în Z

$$P(x) = 4x^4 + 5x^2 - x + 2,$$

deducîndu-se din aceasta rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

R. Se folosește metoda identificării observîndu-se că putem scrie

$$P(x) = (2x^2 + mx \pm 2)(2x^2 + nx \pm 1) \qquad (1)$$

sau o altă descompunere asemănătoare. Dezvoltînd membrul al doilea din (1) și identificînd obținem $m = 1$ și $n = -1$, rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ fiind date de $2x^2 + x + 2 = 0$ și $2x^2 - x + 1 = 0$.

4. Să se descompună în factori cu coeficienţi în R polinomul

$$P(x) = 4x^4 - 15x^3 + 4x^2 - 15x + 4.$$

R. Se observă că polinomul este reciproc; se scoate în factor x^2 şi avem:

$$P(x) = x^2\left[4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 15\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4\right]. \qquad (1)$$

Se notează $x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ şi (1) devine

$$P(x) = x^2(4y^2 - 15y - 4) = 4x^2(y - 4)\left(y + \frac{1}{4}\right), \qquad (2)$$

sau, ţinînd seamă de substituţia făcută anterior $x + \frac{1}{x} = y$, (2) devine

$$P(x) = (4x^2 + x + 4)(x^2 - 4x + 1) =$$

$$= (4x^2 + x + 4)(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}).$$

Altfel. Deoarece nici un divizor raţional al termenului independent de x al lui $P(x)$ nu anulează polinomul respectiv, rezultă că rădăcinile acestuia sînt iraţionale sau complexe conjugate; în acest caz, pentru descompunerea în factori se foloseşte metoda identificării.

Ţinînd seamă că $P(x)$ este un polinom reciproc, se poate scrie

$$4x^4 - 15x^3 + 4x^2 - 15x + 4 = (4x^2 + mx + 4)(x^2 + nx + 1). \qquad (3)$$

Dezvoltăm în membrul al doilea din (3) şi apoi identificăm; obţinem $m = 1$ şi $n = -4$.

5. Să se descompună în factori cu coeficienţi în R, polinomul $P(x) = x^4 - 4x^3 \cos a \cos b + 2x^2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - 4x \cos a \cos b + 1$.

R. Polinomul dat este reciproc; putem deci scrie:

$$P(x) = x^2\left[x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)\cos a \cos b + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b)\right] \qquad (1)$$

şi punînd apoi $x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, (1) devine

$$P(x) = x^2[y^2 - 4y \cos a \cos b + 2(\cos 2a + \cos 2b)]. \qquad (2)$$

Polinomul în y din membrul al doilea din (2) se descompune după formula trinomului de gradul al doilea, rezultînd

$$P(x) = [x^2 - 2x\cos(a + b) + 1][x^2 - 2x\cos(a - b) + 1]. \qquad (3)$$

Descompunerea în factori de gradul întîi a polinoamelor din (3) este posibilă numai dacă $\cos^2(a \pm b) - 1 = 0$.

6. Se consideră polinomul

$$P(x) = x^4 - 2(\cos a + \cos b)x^3 + 2(1 + 2\cos a \cos b)x^2 - 2(\cos a + \cos b)x + 1, \quad \text{unde } \cos a \neq \cos b.$$

Se cere: 1°. Să se demonstreze că fracţia $\frac{P(x)}{x^2}$ este un polinom $Q(x)$ în raport cu $y = x + \frac{1}{x}$. Să se deducă rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$.

2°. Să se descompună $\frac{1}{P(x)}$ în fracţii simple cu coeficienţi în C şi apoi cu coeficienţi în R.

R. 1°. Polinomul dat, este reciproc; se face substituţia $x + \frac{1}{x} = y$ şi se obţine $P(x) = x^2[y^2 - 2(\cos a + \cos b)y + 4\cos a \cos b]$ cu $y_1 = 2\cos a$, $y_2 = 2\cos b$.

$$2°.\ \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(x^2 - 2x\cos a + 1)(x^2 - 2x\cos b + 1)}$$

apoi se ţine seama că rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2x\cos a + 1 = 0$ sînt $x_{1,2} = \cos a \pm i \sin a$ etc.

7. Să se descompună în factori polinomul

$$P(a, b, c) = a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2).$$

R. $P(a, b, c)$ este un polinom simetric şi omogen în raport cu a, b, c. Se observă că $P(a, b, c) = 0$ şi în consecinţă polinomul conţine in factor pe $(a - b)$; din motive de simetrie şi omogenitate conţine în factor şi pe $(b - c)$, $(c - a)$. În definitiv, avem $P(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a)[k_1(a^2 + b^2 + c^2) + k_2(ab + bc + ca)]$, (1)
şi particularizînd pe a, b, c în (1), se obţine $k_1 = 0$ şi $k_2 = -1$.

Altfel. Se observă că $P(a, b, c)$ are tocmai valoarea dată de determinantul *Vandermonde*

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

care se dezvoltă prin scăderi de coloane.

8. Să se descompună în factori polinomul

$$P(a, b, c) = (a + b + c)^7 - (a^7 + b^7 + c^7).$$

R. $P(a, b, c)$ este un polinom simetric şi omogen în raport cu a, b, c. Se observă că $P(a - a, c) = 0$ şi în consecinţă avem descompunerea $P(a, b, c) = (a + b)(b + c)(c + a)[k_1\Sigma a^4 + k_2\Sigma a^3 b + k_3\Sigma a^2 b^2 + k_4 abc\Sigma a]$, (1)
şi particularizînd pe a, b, c în (1) se obţine $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 21$, $k_4 = 28$.

9. Să se descompună în factori polinomul
$$P(x, y, z, u) = [(x^2 - y^2)(z^2 - u^2) - 4xyzu]^2 + 4[(x^2 - y^2)zu + (z^2 - u^2)xy]^2.$$

R. Se folosesc proprietăţile numerelor complexe şi cu notaţiile corespunzătoare putem scrie $P(x, y, z, u) = X^2 + 4Y^2 = (X + 2iY)(X - 2iY)$; dar $X + 2iY = (x^2 - y^2)(z + iu)^2 + 2ixy(z + iu)^2 = (x + iy)^2(z + iu)^2$. Cum $X - 2iY$ este conjugatul lui $X + 2iY$, rezultă că polinomul dat se descompune în

$$(x^2 + y^2)^2(z^2 + u^2)^2.$$

10. Fie polinomul $P(x) = x^4 + 2px^3 + qx^2 + rx + s$. Să se arate că se poate determina o constantă λ astfel încît polinomul $Q(x) = P(x) - (x^2 + px + \lambda)^2$ să fie un pătrat perfect. Să se deducă de aici o metodă de descompunere în factori a lui $P(x)$.

R. Avem $P(x) - (x^2 + px + \lambda)^2 = (q - 2\lambda - p^2)x^2 + (r - 2\lambda p)x + s - \lambda^2$, (1)

şi scriind că trinomul din membrul al doilea din (1) este un pătrat perfect, adică $\Delta = 0$, rezultă relaţia

$$(r - 2\lambda p)^2 - 4(s - \lambda^2)(q - 2\lambda - p^2) = 0. \quad (2)$$

Dar ecuația din (2) are cel puțin o rădăcină reală (fiind de gradul al treilea în λ). De îndată ce se determină un $\lambda \in R$ din (2), rezultă că $P(x)$ se poate pune sub forma unei diferențe sau sume de pătrate, descompunerea în factori*, în al doilea caz, făcîndu-se prin folosirea numerelor complexe $(X + Yi)(X - Yi) = X^2 + Y^2$ etc.

11. Să se descompună în factori cu coeficienți în R polinoamele

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \text{ și}$$

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 - 6x + 3.$$

R. Se aplică metoda de la exercițiul precedent. Pentru primul polinom ecuația în λ este $(2\lambda - 10)(\lambda^2 - 24) = (5\lambda - 25)^2$ cu $\lambda = 5$. Avem deci $P(x) = (x^2 - 5x + 5)^2 - 1 = (x - 1)\cdot(x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Pentru $Q(x)$, ecuația în λ este $\lambda^3 - 6 = 0$ cu $\lambda = \sqrt[3]{6}$; avem descompunerea $Q(x) = \left(x^2 - x - \sqrt[3]{6}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(2\sqrt[3]{6} + 1\right)}\,x + \sqrt{\sqrt[3]{6} - 3}\right]^2$.

Observație. Cele două polinoame se pot descompune în factori și prin metoda coeficienților nedeterminați, observînd că putem scrie:

$$P(x) = (x^2 + ax \pm 6)(x^2 + bx \pm 4) \text{ sau,}$$
$$= (x^2 + ax \pm 2)(x^2 + bx \pm 12) \text{ sau,}$$
$$= (x^2 + ax \pm 3)(x^2 + bx \pm 8) \text{ etc. și}$$
$$Q(x) = (x^2 + ax \pm 3)(x^2 + bx \pm 1).$$

De remarcat însă, că dacă în descompunerea lui $Q(x)$ nu se întrevăd dificultăți, în ceea ce privește $P(x)$ putem avea serioase dificultăți în ceea ce privește alegerea termenului liber din cele două polinoame în care se presupune că se descompune $P(x)$.

12. Să se descompună în factori polinomul

$P(x) = x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$, știind că descompunerea este de forma $(x - x_1)^3(x - x_2)^2$.

R. Din forma descompunerii rezultă că avem $3x_1 + 2x_2 = 13$ și $3x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = 67$, de unde se obține $x_1 = 3$ și $x_2 = 2$.

13. Se dă polinomul $P_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots +$
$+ \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(n+1)!}$ și se cere:

— să se descompună în factori de gradul întîi polinoamele P_1, P_2, P_3;
— să se deducă apoi descompunerea în factori a lui $P_n(x)$.

R. $P_1(x) = \frac{x+1}{1!}$, $P_2(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{2!}$, $P_3(x) = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{3!}$; presupunem de aici că $P_n(x) = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!}$ și dacă în aceasta înlocuim pe n cu $n+1$, obținem tocmai forma din enunț.

14. 1°. Să se descompună în factori primi cu coeficienți în R polinomul $P(x) = x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1 (\cos\varphi \neq \pm 1)$.

---

* Notă: Metoda de descompunere Ferrari.

2°. Făcînd $x = 1$ în descompunerea precedentă și luînd convenabil pe φ să se stabilească formulele :

$$\pm \sin n\theta = 2^{n-1} \sin \theta \sin \left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin \left[\theta + \frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

(semnul + corespunde pentru $\theta \in (0, \pi)$)

$$\cos n\theta = 2^{n-1} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right) \sin \left(\theta + \frac{3\pi}{2n}\right) \dots \sin \left[+ \theta \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right]$$ și pentru n = impar

$$\operatorname{tg} n\theta = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{n}\right) \dots \operatorname{tg} \left[\theta + \frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

Ce devin primele două relații cînd $\theta \to 0$?

R. 1°. Ecuația $P(x) = 0$ se rezolvă prin substituția $x^n = y$; rezultă $x^n = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Grupînd factorii doi cîte doi, se obține: $P(x) = \left(x^2 - 2x \cos \frac{\varphi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x \frac{\varphi + 2\pi}{n} + \right.$

$$\left. + 1\right) \dots \left[x^2 - 2x \cos \frac{(2n-2)\pi + \varphi}{n} + 1\right]. \qquad (1)$$

2°. Prima formulă se obține făcînd $x = 1$ și $\varphi = 2n\,\theta$ în (1). Schimbînd pe θ cu $\theta + \frac{\pi}{2n}$ se obține cea de a doua formulă.

De observat că, dacă $\theta \to 0$, avem :

$$n = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin(n-1)\frac{\pi}{n}$$

$$1 = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin(2n-1)\frac{\pi}{2n}.$$

Pentru a obține ultima formulă (n = impar) se înlocuiește θ cu $\theta + \frac{\pi}{2}$ în prima formulă.

15. Fie $P(x)$ un polinom oarecare. Să se arate că polinomul $Q(x) = \frac{x-a}{2} \times$ $\times [P'(x) + P'(a)] - [P(x) - P(a)]$ admite pe $x = a$ rădăcină multiplă de ordinul m_a, care se cere a se determina.

R. Se verifică ușor că $Q(a) = Q'(a) = Q''(a) = 0$, dar $Q'''(x) = \frac{1}{2} P'''(x) +$ $+ \frac{x-a}{2} P^{IV}(x)$ se vede că nu se anulează pentru $x = a$. În consecință, $m_a = 3$.

16. Să se determine polinomul $P(x) = ax^2 + bx + c$, astfel ca $P(x^2)$ să se dividă prin $P(x)$, $a \neq 0$.

R. Trebuie să avem :

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv (ax^2 + bx + c)(x^2 + \alpha x + \beta);$$

dezvoltînd și identificînd, rezultă un sistem în care presupunînd pe a cunoscut, obținem soluțiile:

b	c	α	β
a	a	-1	1
$-2a$	a	2	1
0	$-a$	0	1
$-a$	0	1	0

Avem deci cinci polinoame care îndeplinesc condiția din enunț și anume: $P_1(x) = a(x^2 + x + 1)$, $P_2(x) = a(x - 1)^2$, $P_3(x) = ax^2 - a$, $P_4(x) = ax^2 - ax$, $P_5(x) = ax^2$.

Altfel. Se împarte $P(x^2)$ la $P(x)$ și se pune condiția ca restul $R(x)$ să fie identic nul.

17. Să se determine p și q din polinomul $P(x) = x^2 + px + q$, astfel încît $P(x^2 + 1)$ să se dividă prin $P(x)$.

R. Trebuie să avem:

$$(x^2 + 1)^2 + p(x^2 + 1) + q \equiv (x^2 + px + q)(x^2 + \alpha x + \beta);$$

dezvoltînd și identificînd obținem sistemul $p + \alpha = 0$, $\beta + p\alpha + q = 2 + p$, $p\beta + q\alpha = 0$, $\beta q = p + q + 1$, care rezolvat conduce la soluțiile reale

p	q	α	β
1	2	-1	2
-1	1	1	1

18. Să se determine relația între coeficienții polinomului $P(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2cx + d$, astfel încît acesta să fie pătratul unui alt polinom $Q(x)$. Caz particular $c = d = 1$.

R. Putem nota $P(x) = (x^2 + ax + n)^2$, (1) și dezvoltînd în (1), prin identificare rezultă relațiile: $a^2 + 2n = b$, $na = c$, $n^2 = d$ (2), eliminarea lui n din (2) conducînd la relațiile $d = \frac{c^2}{a^2}$, $b = \frac{2c}{a} + a^2$. Pentru cazul particular avem polinoamele:

$$P_1(x) = (x^2 + x + 1)^2 \text{ și } P_2(x) = (x^2 - x - 1)^2.$$

19. Să se determine coeficienții p și q astfel încît polinomul $P(x) = x^4 - 2x^2 + x$ să fie divizibil prin $x^2 + px + q$.

R. Se pune condiția ca restul împărțirii să fie identic nul, rezultînd sistemul $1 + pq - p(p^2 - q - 2) = 0$, $q(p^2 - q - 2) = 0$; p este dat de ecuația $p^3 - 2p + 1 = 0$, iar q se deduce din ecuația $1 + pq = 0$, la care se adaugă soluțiile date de $q = 0$ și $p^3 - 2p - 1 = 0$.

20. Să se determine un polinom de gradul cinci astfel ca $P(x) - 1$ să fie divizibil cu $(x - 1)^3$ și $P(x) + 1$ să fie divizibil cu $(x + 1)^3$.

R $P(x) = -\frac{1}{8}(3x^4 - 10x^2 + 15)x$.

21. Să se găsească un polinom de gradul şase $P(x)$, astfel încît $P(x) + 1$ să fie divizibil prin $(x - 1)^3$, iar $P(x) + 2$ să fie divizibil prin x^4.

R. Din $P(x) = (x - 1)^3 P_1(x) - 1$ rezultă că $P_1(x)$ este de gradul al treilea; apoi $P(x) + 2 = (x - 1)^3 P_1(x) + 1$

membrul al doilea din (1) fiind divizibil prin x^4.

Luînd $P_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, prin identificare se găseşte: $a = 10$, $b = 6$, $c = 3$, $d = 1$.

22. Se consideră polinoamele:

$$P_1(z) = z^3 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z^2 + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z + 1,$$

$$P_2(z) = z^3 + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} z^2 + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z + 1.$$

Să se arate că $P_1(z^2)$ este divizibil prin $P_2(z)$, iar $P_2(z^2)$ este divizibil prin $P_1(z)$.

R. Ţinînd seama că $\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ sînt rădăcinile cubice complexe ale unităţii ($\omega_1 + \omega_2 = -1$, $\omega_1\omega_2 = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2$, $\omega_1^3 = 1$), cele două polinoame se pot scrie astfel:

$P_1(z) = z^3 - \omega_2 z^2 - \omega_1 z + 1 = (z^2 - \omega_1)(z - \omega_2)$,

$P_2(z) = z^3 - \omega_1 z^2 - \omega_2 z + 1 = (z^2 - \omega_2)(z - \omega_1)$ şi

$P_1(z^2) = (z^4 - \omega_1)(z^2 - \omega_2) = (z^4 - \omega_2^2)(z^2 - \omega_1^2)$,

$P_2(z^2) = (z^4 - \omega_1^2)(z^2 - \omega_2^2)$, concluziile fiind evidente.

23. Să se găsească condiţia ca polinomul $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ să se dividă prin $x^2 + x + 1$.

R. Trebuie ca $P(\omega) = 0$, unde ω este o rădăcină cubică complexă a unităţii; este necesar ca n să fie de forma $3k \pm 1$, $k \in N$.

24. Să se arate că polinomul

$$P(x) = (x - 1)^{2n+1} + (-1)^{n+1}x^{n+2}$$

este divizibil prin $x^2 - x + 1$. Să se determine cîtul.

R. Avem $(x - 1)^2 = [(x^2 - x + 1) - x]$. Înlocuind în $P(x)$ pe $(x - 1)^2$ prin $(-x)$ găsim

$$P(x) = (-x)^n(x - 1) + (-1)^{n+1} x^{n+2} = (-1)^n x^{n+1} + (-1)^{n+1}x^n + (-1)^{n+2}x^{n+2} =$$

$$= (-1)^{n+1}x^n(x^2 - x + 1) \text{ etc.}$$

Altfel. Se ţine seamă de relaţiile care există între rădăcinile $\alpha_{1,2}$ ale ecuaţiei $x^2 - x + 1 = 0$ şi anume: $\alpha_1^2 = -\alpha_2$, $\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1 = 0$, $\alpha_1^3 + 1 = 0$ etc.

25. Să se determine cîtul împărţirii polinomului

$$P(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1 \text{ prin } Q(x) = x^2 - 3x + 2.$$

R. Se observă că $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ şi că se poate scrie $x - 2 = (x - 1) - 1$; astfel fiind, avem:

$$P(x) = (x - 2)[(x - 2)^{2n-1} + (x - 1)^{n-1} + (x - 1)^{n-2} + \ldots + 1]. \quad (1)$$

Acum rămîne de arătat că $[(x-2)^{2^n-1}+1]$, (2) se divide prin $(x-1)$: pentru aceasta se observă că dacă se notează $x-2=y \Leftrightarrow x-1=y+1$, (2) devine $(y^{2^n-1}+1)$ care, desigur, se divide prin $y+1$. În consecinţă,

$$P(x):Q(x)=(x-2)^{2n-2}-(x-2)^{2n-3}+\ldots+(x-2)+1+$$
$$+(x-1)^{n-2}+(x-1)^{n-3}+\ldots+1,$$

26. Să se arate că polinomul

$$x^{n+1}\cos(n-1)\varphi-x^n\cos n\varphi-x\cos\varphi+1$$

este divizibil prin $x^2-2x\cos\varphi+1$. Să se afle cîtul.

R. Soluţiile ecuaţiei $x^2-2x\cos\varphi+1=0$ sînt $x_{1,2}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$, care înlocuite în polinomul dat şi ţinînd seamă de formula lui *Moivre*, demonstrează prima parte a problemei.

Pentru aflarea cîtului se observă că primul termen al acestuia este $x^{n-1}\cos(n-1)\varphi$, iar primul deîmpărţit parţial se pune cu uşurinţă sub forma

$$x^n\cos(n-2)\varphi-x^{n-1}\cos(n-1)\varphi-x\cos\varphi+1.$$

Al doilea termen al cîtului este $x^{n-2}\cos(n-2)\varphi$ şi al doilea deîmpărţit parţial se pune sub forma

$$x^{n-1}\cos(n-3)\varphi-x^{n-2}\cos(n-2)\varphi-x\cos\varphi+1.$$

Cîtul este $Q(x)=x^{n-1}\cos(n-1)\varphi+x^{n-2}\cos(n-2)\varphi+\ldots+x\cos\varphi+1.$

27. Să se arate că polinomul

$$P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$$

este divizibil cu $(x-1)^2$. Să se găsească cîtul.

R. Grupînd convenabil termenii, avem :

$$P(x)=nx^n(x-1)-(x^n-1)=(x-1)[nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1]=$$
$$=(x-1)^2[nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)^{n-3}+\ldots+2x+1].$$

De remarcat că prima parte a problemei se poate demonstra uşor, verificînd doar că $P(1)=$ $=P'(1)=0.$

28. Să se arate că polinomul

$$n(n-1)x^{n+1}-2(n^2-1)x^n+n(n+1)x^{n-1}-2$$

este divizibil prin $(x-1)^3$. Să se afle cîtul.

R. Se va arăta mai întîi că $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$. Apoi se consideră identitatea

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=1+x+x^2+\ldots+x^n$$

care se derivează de două ori : membrul al doilea, după derivare, reprezentînd tocmai cîtul.

29. Să se determine a, b, c din polinomul

$$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+(a-1)x-1,$$

astfel încît acesta să se dividă prin $P_1(x)=(x-1)^3$.

R. Se poate folosi metoda identificării scriind:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a-1)x - 1 = (ax+1)(x-1)^3, \qquad (1)$$

şi dezvoltînd în ambii membri din (1), prin identificare rezultă: $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$.

Altfel. Din condiţiile $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, rezultă un sistem în a, b, c cu aceleaşi rezultate obţinute anterior.

30. Să se determine a şi $b \in R$ din polinomul

$$P(x) = a(x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 3)^2 + (x^4 + 3x^2 + 2)^3 + b(x^2 + 1)^4,$$

astfel încît acesta să se dividă prin $x^2 + x + 1$.

R. Trebuie ca $P(\omega) = 0$, unde ω este o rădăcină cubică complexă a unităţii, adică verifică relaţiile $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = 1$, $\omega^4 = \omega$ etc., se obţine $a = -3$, $b = 3$

Altfel Se formează polinomul ajutător $P_1(x^2)$ în care se pune condiţia ca $P_1(-x-1) = 0$, obţinîndu-se acelaşi rezultat.

31. Să se găsească condiţia ca polinomul

$$P_1(x) = x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$$

să fie divizibil prin $P_2(x) = x^h + x^{h-1} + \ldots + x + 1$, cu $h < m$.

R. Se multiplică ambele polinoame cu $x - 1$, acestea devenind $P_1(x) = x^{m+1} - 1$ şi $P_2(x) = x^{h+1} - 1$ şi condiţia de divizibilitate este dată de $m + 1 = k(h + 1)$, unde $k \in N$.

32. Să se determine a şi b astfel ca polinomul

$$P(x) = (x + 1)^n + ax + b,$$

să fie divizibil prin $x^2 + 1$.

R. Trebuie să avem $P(\pm i) = 0$; pentru calculul lui $(i + 1)^n$ se va ţine seamă că

$$(i + 1)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n.$$

Rezultă ecuaţiile

$$a + (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} = 0 \text{ şi } b + (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} = 0,$$

de unde şi valorile corespunzătoare pentru a şi b.

33. Să se determine a şi b astfel ca polinomul

$$P(x) = (x + \sqrt{3})^n + ax + b$$

să fie divizibil prin $x^2 + 1$.

R. Procedeu analog ca la exerciţiul precedent, iar pentru calculul lui $(i + \sqrt{3})^n$ se va ţine seamă că

$$(i + \sqrt{3})^n = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n.$$

34. Să se calculeze restul împărţirii unui polinom prin $(x - a)(x - b)(x - c)$, cînd se cunosc resturile împărţirii acestui polinom prin $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$. Generalizare.

R. Fie A, B, C cîturile respective.

Avem $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\,Q(x) + R(x)$, unde $R(x)$ este de gradul al doilea, adică de forma $R(x) = mx^2 + nx + p$. Avem $A = ma^2 + na + p$, $B = mb^2 + nb + p$, $C = mc^2 + nc + p$. În final rezultă

$$R(x) = A\,\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\,\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C\,\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}, \quad \text{cu } a \neq b \neq c.$$

35. Să se găsească restul împărțirii polinomului $P(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 2$ prin polinomul $P_1(x) = x^2 - 2x + 2$.

R. Avem $P(x) = (x^2 - 2x + 2)\,Q(x) + mx + n$ (1)

luînd în (1) $x = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$ se obține $m = -6$ și $n = 20$ ($x = 1 + i$ fiind o rădăcină a ecuației $P_1(x) = 0$).

36. Să se determine restul împărțirii polinomului

$$P(x) = x^n + x + b \text{ prin } (x - a)^2.$$

R. Avem $P(x) = (x - a)^2 Q(x) + mx + p$; se calculează $P'(x)$ și apoi se scrie că $P(a) = 0$ și $P'(a) = 0$ deducîndu-se $m = na^{n-1} + 1$ și $p = (1 - n)a^n + b$.

37. Să se determine restul împărțirii polinomului

$$P(x) = (\cos a + x \sin a)^n \text{ prin } x^2 + 1.$$

R. Avem relația $P(x) = (x^2 + 1)Q(x) + \alpha x + \beta$ (1)
și făcînd în (1) pe $x = i$, rezultă că $\cos na + i \sin na = \alpha i + \beta$, de unde — prin identificare — se obține $\alpha = \sin na$, $\beta = \cos na$.

38. Să se determine restul împărțirii polinomului

$$P_1(x) = x^{2n} - x^n + 1 \text{ prin } P_2(x) = x^2 - x + 1.$$

R. Putem scrie

$$P_1(\alpha_1) = (x^2 - x + 1)Q_1(x) + ax + b, \qquad (1)$$

unde $\alpha_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ este una din rădăcinile complexe ale ecuației $P_2(x) = 0$. Dar α_1 se poate scrie sub forma $\alpha_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ și prin urmare avem

$$P(\alpha_1) = a\alpha_1 + b, \text{ sau}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2n} - \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n + 1 = a\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{x}{3}\right) + b, \qquad (2)$$

dezvoltînd și identificînd în (2), obținem

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{6},\quad b = \left(2\cos\frac{n\pi}{3} - 1\right)\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{6}.$$

39. Să se găsească toate polinoamele $P(x)$ care se anulează pentru $x = 0$ și care verifică identitatea

$$P(x + 1) - P(x) = (x + 1)^3.$$

R. Dacă $P(x)$ este de gradul p, membrul întîi al identității date este un polinom de gradul $(p-1)$ al cărui prim termen este $C_p^1 a_0 x^{p-1}$. Rezultă prin identificare $p = 4$, $a_0 = \frac{1}{4}$; deci $P(x)$ este de forma

$$P(x) = \frac{1}{4} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx.$$

Înlocuind în identitatea din enunț și identificînd, găsim

$$P(x) = \frac{1}{4} x^2(x+1)^2.$$

40. Să se determine două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ de gradul al doilea cu coeficienți în R, prime între ele și care verifică relația $P^2(x) + Q^2(x) = (x^2+1)^2$. Să se arate apoi că $[P'(x)]^2 + [Q'(x)]^2 = 4\sqrt{P^2(x) + Q^2(x)}$.

R. Forma relației din enunț sugerează folosirea numerelor complexe. Astfel fiind, se poate scrie:

$$[P(x) + iQ(x)][P(x) - iQ(x)] = (x+i)^2(x-i)^2, \quad (1)$$

(observîndu-se că $P(x) + iQ(x)$ și $P(x) - iQ(x)$ sînt prime între ele pe C). Dar egalitatea (1) are loc numai dacă $P(x) + iQ(x) = k(x+i)^2$ și $P(x) - iQ(x) = \frac{1}{k}(x-i)^2$, unde k este o constantă complexă de modul 1. Se poate deci lua $k = \cos\varphi + i\sin\varphi$, rezultînd $P(x) = (x^2 - 1)\cos\varphi - 2x\sin\varphi$, $Q(x) = (x^2-1)\sin\varphi + 2x\cos\varphi$. Partea a doua a problemei nu mai comportă nici o dificultate.

41. Să se arate că polinomul
$P(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ este nenegativ pe R.

R. Un polinom $P(x)$ este nenegativ pe R dacă pentru $\forall x \in R \Rightarrow P(x) > 0$, (1). Pentru ca condiția (1) să fie îndeplinită, este necesar și suficient ca polinomul respectiv să fie egal cu suma pătratelor a două polinoame cu coeficienți în R. Pentru aceasta se ține seama de identitatea lui *Lagrange*:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2,$$

care permite să se transforme un produs de sumă de pătrate într-o sumă de pătrate.

În cazul de față este ușor de verificat că $P(-2) = P'(-2) = 0$ și efectuînd împărțirea lui $P(x)$ prin $(x+2)^2$, rezultă $P(x) = (x+2)^2(x^4+2x^2+4) = [(x+2)^2 + 0^2][(x^2+1)^2 + (\sqrt{3})^2]$, (1)
și ținînd seamă de identitatea lui *Lagrange* menționată, prin identificare, avem $a^2 = (x+2)^2$, $b^2 = 0^2$, $c^2 = (x^2+1)^2$ și $d^2 = (\sqrt{3})^2$.

Astfel fiind, avem $P(x) = [(x+2)(x^2+1)]^2 + [\sqrt{3}(x+2)]^2$, ceea ce demonstrează că $P(x)$ este nenegativ.

Observație. Desigur că, ajungîndu-se la o descompunere convenabilă în factori a lui $P(x)$, va trebui arătat că $P(x) > 0$ pentru $\forall x \in R$.

42. Fie $f(x)$ un polinom de gradul n; să se arate că

$$F(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

este un polinom de gradul $n-2$. Să se găsească toate polinoamele $f(x)$ pentru care avem $F(x) = x^2 + x + 1$.

R. Se va arăta că coeficienţii lui x^n şi x^{n-1} din $F(x)$ sînt nuli. Polinoamele pentru care avem $F(x) = x^2 + x + 1$ au forma generală $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{12} + ax + b$.

43. Să se reducă expresia

$$E = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{P(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)},$$

unde a, b, c sînt rădăcinile cubice ale unităţii, iar $P(x)$ un polinom în x.

R. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ iar $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$ ($\omega^3 = 1$, $1 + \omega + \omega^2 = 0$).
Notînd

$$A = a_0 + a_3 + a_6 + \ldots, \quad B = a_1 + a_4 + a_7 + \ldots, \quad C = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots,$$

se arată imediat că

$$P(a) = A + B + C, \quad P(b) = A + B\omega + C\omega^2, \quad P(c) = A + B\omega^2 + C\omega.$$

În final rezultă $E = C$.

44. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul $(p + 1)$, astfel încît să avem $P(0) = 0$; $P(x) - P(x - 1) = x^p$.

Să se demonstreze că $P(x)$ este divizibil prin $x + 1$ şi că avem $P(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$.

R. Notăm

$$P(x) \equiv a_0x^{p+1} + a_1x^p + \ldots + a_px + a_{p+1};$$

înlocuind în relaţia de condiţie şi identificînd, găsim $a_0 = \frac{1}{p+1}$. Apoi scriem că $x^k < p$ are coeficientul nul, avem

$$(-1)^{p-k+1} \cdot a_0C_{p+1}^k + (-1)^{p-k}a_1C_p^k + \ldots + (-1)^1a_{p-k}C_{k+1}^k = 0,$$

adică o relaţie de recurenţă, care permite calculul din aproape în aproape al coeficienţilor polinomului $P(x)$.

Luînd $k = p - 1$, $k = p - 2$, $k = p - 3$, rezultă

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{p}{12}, \quad a_3 = 0, \ldots$$

În relaţia de definiţie luînd $x = 0$, rezultă $P(0) - P(-1) = 0$; deci $P(-1) = 0$, adică $P(x)$ se divide cu $x + 1$. Înlocuind în aceeaşi relaţie pe x cu $x - 1$, $x - 2, \ldots, x - n + 1$ şi adunînd cele n relaţii găsim

$$P(x) - P(x - n) = x^p + (x - 1)^p + \ldots + (x - n + 1)^p,$$

care pentru $x = n$ dă tocmai $P(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$.

45. Se dă expresia $E = \cos^{2n} x + \sin^{2n} x$.
Prin înlocuirea lui $\cos 2x = y$, această expresie devine un polinom $P_n(y)$ de gradul n. Se cere :

1°. Să se găsească rădăcinile acestui polinom ;

2°. Să se determine relaţia de recurenţă între polinoamele

$$P_{n+1}(y), \; P_n(y), \; P_{n-1}(y).$$

R. 1°. Se pleacă de la

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ și } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

și deci

$$P_n = \frac{1}{2^n} [(1 + y)^n + (1 - y)^n].$$

Apoi se rezolvă ecuația binomă $\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^n = -1.$

2°. Avem

$2P_n = \frac{1}{2^n} [(1 + y)^n + (1 - y)^n][(1 + y) + (1 - y)]$, de unde, prin înmulțire, rezultă **relația** de recurență cerută

$$2P_n = 2P_{n+1} + \frac{1}{2} (1 - y^2)P_{n-1}.$$

46. Să se determine un polinom $P(x)$ astfel încît să avem

$$P(x) - P'(x) = x^n + x + 2.$$

R. Avem $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ și prin identificare se deduce:

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = n = 1\,!\,C_n^1,$$
$$a_2 = 2\,!\,C_n^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-2} = (n - 2)\,!\,C_n^{n-2},$$
$$a_{n-1} = (n - 1)\,!C_n^{n-1} + 1$$
$$a_n = 2.$$

B. Ecuații algebrice de grad $\geqslant 3$

1. Să se rezolve ecuația

$$(x - a)^3(b - c)^3 + (x - b)^3(c - a)^3 + (x - c)^3(a - b)^3 = 0,$$

unde $a \neq b \neq c$.

R. Se notează cu $P(a, b, c, x)$ primul membru al ecuației și se arată că $P(a, b, c, x)$ **se anulează pentru** $x = a$, $x = b$, $x = c$, $a = b$, $b = c$, $c = a$ și prin urmare avem $P(a, b, c, x) \equiv k(x - a)(x - b)(x - c)(a - b)(b - c)(c - a)$, unde k este o constantă care, în cazul de față, nu mai este necesar a se determina, rădăcinile ecuației fiind evidente.

2. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - 2(m^2 + 1)x^2 + (m^2 + 1)x + m^2(2m^2 + 1) = 0.$$

R. Se consideră ca o ecuație bipătrată în m^2, obținîndu-se $m_1^2 = x^2 - x$, $m_2^2 = \frac{x - 1}{2}$, rădăcinile rezultînd din aceste două ecuații.

3. Să se determine parametrul m şi să se rezolve ecuaţia

$$3x^3 - 7x^2 + m = 0,$$

ştiind că $x_1 - x_2 = 1$, x_1, x_2 fiind două din rădăcinile ecuaţiei date.

R. Din $x_1 - x_2 = 1$ şi primele două relaţii ale lui *Viète* rezultă $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{2}{3}$, pentru $m = 4$.

4. Se consideră polinomul $P(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n$. Se cere:

1°. Pentru $m = 1$ să se determine n şi să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$, astfel ca produsul a două rădăcini să fie egal cu 1.

2°. Să se determine m şi n astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $x^2 - 1$.

R. 1°. Din $x_1x_2x_3 = -n$, rezultă $x_3 = -n$ şi scriind că x_3 verifică ecuaţia din enunţ, obţinem: $n_1 = 0$, $n_2 = -3$; avem deci soluţiile:

n	x_1	x_2	x_3
0	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	0
-3	$+i$	$-i$	3

2°. Se formează polinomul ajutător $P_1(x) = P(x) = x \cdot x^2 - 3x^2 + mx + n$ în care trebuie să avem $P_1(1) = 0$, sau $(1 + m)x - 3 + n = 0$, cu $m = -1$ şi $n = 3$.

Altfel. Se pun condiţiile $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$.

Altfel. Se împarte $P(x)$ la $x^2 - 1$ şi se pune condiţia ca restul să fie nul.

5. Se consideră ecuaţia

$$x^3 - 3(m + 2)x^2 + (2m^2 + 17m + 5)x - 4(2m^2 + 5m - 3) = 0.$$

1°. Să se rezolve ecuaţia ştiind că între rădăcinile sale x_1, x_2, x_3 are loc relaţia: $x_1 + x_3 = x_2 + m$.

2°. Să se determine intervalele în care este cuprins parametrul real m în aşa fel încît să existe relaţia:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} > \frac{3}{2}.$$

R. 1°. Din relaţiile $x_1 + x_2 + x_3 = 3(m + 2)$ şi $x_1 + x_3 = x_2 + m$ rezultă $x_2 = m + 3$; folosindu-se apoi celelalte relaţii între coeficienţi şi rădăcini obţinem: $x_1 = 2m - 1$, $x_3 = 4$.

2°. Se formează ecuaţia de gradul al treilea cu rădăcini de forma $y_i = \frac{1}{x_i} \Rightarrow x_i = \frac{1}{y_i}$, iar x_i este o rădăcină a ecuaţiei de la pct. 1° şi înlocuind pe x cu $\frac{1}{x}$, obţinem ecuaţia

$$4(2m^2 + 5m - 3)y^3 - (2m^2 + 17m + 5)y^2 + 3(m + 2)y - 1 = 0.$$

Acum punem condiţia ca $\sum y_i > \frac{3}{2}$, adică

$$\frac{2m^2 + 17m + 5}{4(2m^2 + 5m - 3)} > \frac{3}{2}.$$

6. Să se rezolve ecuaţia ştiind că admite o rădăcină întreagă.

$$x^3 - (8 - \sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3} - 3)x + 108 - 48\sqrt{3} = 0.$$

R. Ecuaţia se poate scrie sub forma

$(x^3 - 8x^2 - 6x + 108) + \sqrt{3}(x^2 + 2x - 48) = 0$, de unde rezultă că rădăcina întreagă x_1 a ecuaţiei din enunţ este o rădăcină comună a ecuaţiilor $\begin{cases} x^2 + 2x - 48 = 0 \\ x^3 - 8x^2 - 6x + 108 = 0 \end{cases}$

obţinîndu-se fără dificultate $x_1 = 6$. Apoi, folosind schema lui *Horner*, se găsesc şi celelalte două rădăcini: $x_2 = 5 - \sqrt{3}$, $x_3 = -3 + \sqrt{3}$.

7. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - m(\sqrt{3} - 1)x^2 + p(2 - \sqrt{3})x - q = 0$$

şi să se determine parametrii p şi q, ştiind că admite rădăcini reale care verifică relaţia: $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 0$.

R. Din $\Sigma(x_1 - x_2)^2 = 0$ rezultă $x_1 = x_2 = x_3$; apoi ţinînd seamă de relaţiile lui *Viète* se obţin rădăcinile şi parametrii $m = \sqrt{3}$, $p = 2$, şi $q = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$.

8. Să se verifice că ecuaţia

$$b^2x^3 - 3ab^2x^2 + (3a^2b^2 - 1)x + a(1 - a^2b^2) = 0, \ (a, \ b \in R),$$

are rădăcinile în progresie aritmetică.

R. Rădăcinile sînt: $a - \frac{1}{b}$, a, $a + \frac{1}{b}$.

9. Se dă ecuaţia $bx^3 - a(1 + b + b^2)x^2 + a^2(1 + b + b^2)x - a^3b = 0$ şi se cere să se verifice că rădăcinile acesteia sînt în progresie geometrică.

R. Rădăcinile sînt: $\frac{a}{b}$ a, ab.

10. Să se rezolve ecuaţia $ax^3 - (a + 2)x^2 + 9x - 1 = 0$ ştiind că rădăcinile sale sînt în progresie armonică.

R. Relaţia de condiţie este $\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$; se formează ecuaţia de gradul al treilea ale cărei rădăcini sînt de forma $y_1 = \frac{1}{x_1}$ şi în aceasta se scrie că rădăcinile sale sînt în progresie aritmetică. Se obţine: $a = 24$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{4}$.

11. Să se determine parametrul a din ecuaţia $ax^3 - x^2 + 1 = 0$, astfel încît aceasta să aibă o rădăcină dublă, care se va determina.

R. Se poate folosi metoda grafică observîndu-se că avem : $a = \frac{x^2 - 1}{x^3}$; pentru $a = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ avem $x_1 = x_2 = \sqrt{3}$ iar pentru $a = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ avem $x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$.

• **12.** Se dă funcția $f(x, m, n) = x^3 - 6x^2 + (1 - n)x + m$, în care m și n sînt parametri reali.

1°. Rădăcinile ecuației $f(x, m, n) = 0$ fiind x_1, x_2, x_3, fără a rezolva ecuația, să se calculeze expresia

$$E = \frac{x_1 + x_2}{x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_3 + x_1}{x_2}.$$

2°. Să se rezolve ecuația $f(x, m, 3) = 0$, știind că produsul a două rădăcini este -2.

3°. Să se determine m și n astfel ca ecuația $f(x, m, n) = 0$ să aibă rădăcina $x_1 = 2 - i$ și să se rezolve ecuația în acest caz.

R 1°. Din $\Sigma x_1 = 6$, rezultă $x_1 + x_2 = 6 - x_3$ și deci $E = \sum \frac{6 - x_3}{x_3} = \sum\left(\frac{6}{x_3} - 1\right) = 6\sum \frac{1}{x_i} - 3 = \frac{6(n-1)}{m} - 3$.

2°. Din $x_1x_2x_3 = -m$ și $x_1x_2 = -2$ rezultă $x_3 = \frac{m}{2}$; punînd condiția ca această rădăcină să verifice ecuația din enunț rezultă $m_1 = 0$, $m_2 = 12$. Pentru $m = 12$ rădăcinile ecuației sînt $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ și 6, iar pentru $m = 0$ rădăcinile sînt $3 \pm \sqrt{11}$ 0.

3°. Se pune condiția ca $f(x, m, n)$ să se dividă la $[x - (2 + i)][x + (2 + i)] = x^2 - 4x + 5$ și rezultă $m = -10$, $n = -12$ $x_3 = 2$.

• **13.** Să se arate că dacă ecuația $P(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ are o rădăcină dublă, aceasta este egală cu $\frac{1}{3} \cdot \frac{bc - ad}{ac - b^2}$.

R Se pune condiția ca $P(x)$ și $P'(x)$ să aibă un divizor de gradul întîi.

• **14.** Să se rezolve ecuația $x^3 + ax^2 + 2ax + 8 = 0$, știind că între rădăcinile sale există relația $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

R. Se va observa că relația de condiție se poate scrie sub forma $(x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3) + x_3 = 0 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2a$ apoi se folosesc relațiile lui *Viete*, obținîndu-se : $a = -2$, $x_1 = x_2 = 2$ și $x_3 = -2$.

• **15.** Să se determine constantele a și $b \in Z$ astfel încît ecuațiile $P_1(x) = 2x^3 - x^2 + a = 0$ și $P_2(x) = x^3 + bx + 2 = 0$ să aibă o rădăcină comună întreagă.

R Folosirea algoritmului lui *Euclid* sau metoda scăderilor repetate conduc la calcule dificile rădăcina comună avînd forma $x = \frac{2ab - 8b - 2}{4b^2 + a + b - 4}$. Se observă însă că rădăcina comună nu poate fi decît un divizor al termenului liber din $P_2(x)$, adică ± 1 sau ± 2. Astfel fiind, folosim metoda identificării, putînd scrie cele două polinoame :

$P_1(x) = (x \pm 1)(2x^2 + mx \pm a)$ sau $P_1(x) = (x \pm 2)\left(2x^2 + mx \pm \frac{a}{2}\right)$ și $P_2(x) = (x \pm 1)(x^2 + nx \pm 2)$ sau $P_2(x) = (x \pm 2)(x^2 + nx \pm 1)$. Luînd $P_1(x) = (x - 1)(2x^2 + mx + a)$ și $P_2(x) = (x - 1)(x^2 + nx + 2)$ se găsește $a = -1$ și $b = -3$, divizorul comun fiind $(x - 1)$.

16. Se dă ecuația $P(x) = ax^3 + (1 - 2a)x^2 + 1 = 0$ și se cere să se determine a și apoi să se rezolve, știind că are o rădăcină dublă.

R. Se pot folosi relațiile lui *Viète*, ținînd seama că $x_1 = x_2$. Rezultă $a = 2$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Altfel. Se scrie că $P(x)$ și $P'(x)$ au un divizor de gradul întîi.

Altfel. Separăm pe a din ecuația dată, rezultînd

$$a = \frac{x^2 + 1}{x^2(2 - x)} \qquad (1);$$

se calculează derivata funcției $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(2 - x)}$ și i se află rădăcinile: abscisele punctelor de extrem ale funcției $f(x)$ înlocuite în (1) dau valorile lui a. În cazul de față $f'(x)$ se anulează pentru $x' = 1$, de unde rezultă $a = 2$ etc.

17. Să se determine a din ecuațiile

$$P_1(x) = 2x^3 + x^2 + x + a = 0 \text{ și } P_2(x) = x^3 - x^2 + ax - 2 = 0$$

astfel încît acestea să aibă două rădăcini comune.

R. Se poate folosi algoritmul lui *Euclid*, punînd condiția ca restul, corespunzător împărțitorului de gradul al doilea să fie nul.

Altfel. Se poate folosi metoda scăderilor repetate:

$$P_1(x) - 2P_2(x) = 3x^2 + (1 - 2a)x + a + 4 = P_3(x)$$

$$3P_2(x) - xP_3(x) = (2a - 4)x^2 + (2a - 4)x - 6 = P_4(x).$$

Dar, oricare din polinoamele $P_3(x)$, $P_4(x)$ poate fi divizorul comun al polinoamelor date prin enunț. Așadar, scriem că $P_3(x)$ și $P_4(x)$ au aceleași rădăcini, rezultînd

$$\frac{3}{2a - 4} = \frac{1 - 2a}{2a - 4} = \frac{a + 4}{-6} \qquad (1)$$

din (1) rezultînd $a = -1$. Corespunzător acestei valori a lui a, rezultă că divizorul comun este $x^2 + x + 1$.

18. Să se rezolve trigonometric ecuația $x^3 - 3x - 1 = 0$.

R. Ecuația se poate scrie și sub forma $x^3 - 3x = 1$, ceea ce sugerează folosirea identității trigonometrice $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ și notînd $x = \lambda\cos\alpha$, ecuația dată se transformă $\lambda^3\cos^3\alpha - 3\lambda\cos\alpha = 1$, de unde rezultă $\lambda = 2$ și $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$. Avem deci rădăcinile; $x_1 = 2\cos 20°$, $x_2 = -2\sin 10°$, $x_3 = -2\cos 40°$.

19. Să se determine a, $a \in R$, astfel încît ecuația $P(x) = ax^3 - x^2 - (a + 2)x - 2a = 0$ să aibă o rădăcină complexă de modul 1.

R. Asociind rădăcinii complexe de modul 1 conjugata acesteia rezultă că $P(x)$ trebuie să fie divizibil prin $Q(x) = x^2 + bx + 1$. Punînd condiția ca restul împărțirii lui $P(x)$ prin $Q(x)$ să fie nul, rezultă $a = 2$ și $b = \frac{3}{2}$.

20. Să se arate că determinarea rădăcinilor complexe ale ecuației $P(x) = x^3 + px + q = 0$ cu coeficienți reali se reduce la precizarea rădăcinii reale a unei ecuații de același grad.

R. Fie $x_1 = a + bi$ o rădăcină complexă a lui $P(x) = 0$; scriind că x_1 anulează pe $P(x)$, rezultă ecuațiile:

$$a^3 - 3ab^2 + pa + q = 0 \text{ și } 3a^2b - b^3 + pb = 0. \quad (1)$$

Din ecuația a doua rezultă $b = 0$ (ceea ce corespunde rădăcinii reale a ecuației $P(x) = 0$) sau $b^2 = 3a^2 + p$. Asociind această relație cu prima ecuație din (1), rezultă $8a^3 + 2ap - q = 0$.

21. Se dă ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ale cărei rădăcini sînt α, β, γ. Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt α^2, β^2, γ^2.

R. Calculăm $\Sigma\alpha^2$, $\Sigma\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, folosind relațiile între coeficienți și rădăcini. Ecuația căutată este $a^2x^3 - (b^2 - 2ac)x^2 + (c^2 - 2bd)x - d^2 = 0$.

Altfel. Rădăcinile ecuației căutate sînt de forma $y = \alpha^2$ sau $y = x^2$. Eliminăm pe x^2 între

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

și

$$x^2 - y = 0.$$

De aici scoatem $x = \pm\sqrt{y}$ și înlocuind în prima ecuație pe x cu $\sqrt{y}$ găsim $\sqrt{y}(ay + c) = -(by + d)$. Ridicăm această ecuație la pătrat și obținem același rezultat ca în soluția primă.

Altfel. Rădăcinile ecuației căutate sînt

$$y_1 = \alpha^2, \quad y_2 = \beta^2, \quad y_3 = \gamma^2$$

și deci ecuația are forma $(y - \alpha^2)(y - \beta^2)(y - \gamma^2) = 0$.

Deoarece $y = x^2$, ecuația se scrie

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = 0.$$

Ținînd seama că

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

urmează că avem

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = ax^3 - bx^2 - d.$$

Avem deci

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(ax^3 - bx^2 + cx - d) = 0.$$

Dezvoltînd găsim o ecuație de gradul al șaselea în x, în care dacă înlocuim pe x^2 cu y, obținem aceeași ecuație ca în cazul metodelor anterioare.

22. Se dă ecuația $x^3 + px + q = 0$, cu $q \neq 0$, ale cărei rădăcini sînt x_1, x_2, x_3. Se cere să se formeze ecuația de gradul al treilea ale cărei rădăcini sînt:

$$y_1 = \frac{1}{x_2x_3} + x_1, \quad y_2 = \frac{1}{x_1x_3} + x_2, \quad y_3 = \frac{1}{x_1x_2} + x_3.$$

R. Din $y_1 = \frac{1}{x_2 x_3} + x_1$ rezultă $x_1 = \frac{q y_1}{q-1}$ şi scriind că x_1 verifică ecuaţia din enunţ obţinem: $q^2y^3 + p(q-1)^2y + (q-1)^3 = 0$.

Cazul $q = 1$ se va trata separat.

23. Se dă ecuaţia $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cu $r \neq 0$, ale cărei rădăcini sînt a, b, c. Să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sînt

$$y_1 = a + \frac{1}{a},\ y_2 = b + \frac{1}{b},\ y_3 = c + \frac{1}{c}.$$

R. Punem

$$y = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2+1}{a}.$$

Avem de eliminat pe x între $y = \frac{x^2+1}{x}$ şi $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; găsim

$$ry^3 + (pr+q)y^2 + (pq+p+qr-3r)y + (p-r)^2 + (1-q)^2 = 0,$$

(a se vedea şi capitolul VIII — eliminări).

24. Fiind dată ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 se cere să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sînt $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, $x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$, $x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2$.

R. $x^3 + (3b - 2a^2)x^2 + (a^4 - 3a^2b + 3b^2)x + b^2 - a^2b^2 + a^3c = 0$.

25. Fiind dată ecuaţia $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ale cărei rădăcini sînt α, β, γ, să se găsească ecuaţia ale cărei rădăcini sînt:

$$\frac{1}{1-\alpha},\ \frac{1}{1-\beta},\ \frac{1}{1-\gamma},\ \text{cu } \alpha, \beta, \gamma \text{ diferite de } 1.$$

R. Fie
$$y^3 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (1)$$
ecuaţia căutată. Din $y = \frac{1}{1-x}$ se scoate $x = \frac{y-1}{y}$; se înlocuieşte această valoare în ecuaţia dată şi se identifică cu (1).

26. $$\frac{\alpha}{\beta+\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma+\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta},\ \text{cu } (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \neq 0.$$

R. Avem $y = \frac{x}{-p-x}$, de unde $x = -\frac{py}{y+1}$, apoi se scrie că aceasta verifică ecuaţia din enunţ.

27. $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \gamma\alpha$, $\gamma^2 - \alpha\beta$.

R. Avem $y = x^2 + \frac{r}{x} = \frac{x^3+r}{x} = \frac{-px^2-qx}{x} = -px - q$ şi deci $x = -\frac{p+q}{p}$.

28. Se dă ecuaţia $x^3 + px + q = 0$, ale cărei rădăcini sînt a, b, c. Să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sînt

$$\frac{a-1}{b+c},\ \frac{b-1}{c+a},\ \frac{c-1}{a+b},\ \text{cu } (a+b)(b+c)(c+a) \neq 0.$$

R. Fie

$$y = \frac{a-1}{b+c}. \quad (1)$$

Din $\sum a = 0$ scoatem $b + c = -a$ şi deci (1) devine

$$y = \frac{a-1}{-a}. \quad (2)$$

Avem de eliminat pe x între ecuaţia dată şi (2).

29. Dacă α, β, γ sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + qx^2 + r = 0$, să se formeze ecuaţia ale cărei rădăcini sînt $-\alpha + \beta + \gamma$; $\alpha - \beta + \gamma$; $\alpha + \beta - \gamma$.

R. $y^3 + qy^2 - q^2y - q^3 - 8r = 0$.

Ştiind că a, b, c sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 + qx + r = 0$, $r \neq 0$, să se formeze ecuaţiile ale căror rădăcini sînt :

30. $bc + \frac{1}{a}$, $ca + \frac{1}{b}$, $ab + \frac{1}{c}$.

R. $ry^3 + q(1-r)y^2 + (1-r)^3 = 0$;

31. $\frac{b+c}{a^2}$, $\frac{c+a}{b^2}$, $\frac{a+b}{c^2}$.

R. $ry^3 - qy^2 - 1 = 0$.

32. a^3, b^3, c^3.

R. $y^3 + 3ry^2 + (q^3 + 3r^2)y + r^3 = 0$.

33. $a(b + c)$, $b(c + a)$, $c(a + b)$.

R. $y^3 - 2qy^2 + q^2y + r^2 = 0$.

34. Fie a, b, c rădăcinile ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$ cu $q \neq 0$. Să se găsească ecuaţia ale cărei rădăcini sînt :

$$\frac{b^2+c^2}{a}, \frac{c^2+a^2}{b}, \frac{a^2+b^2}{c}.$$

R. Din $\Sigma a = 0$ scoatem $b^2 + c^2 - 2p - a^2$. Rădăcinile ecuaţiei căutate sînt de forma

$$y = -\frac{(2p + a^2)}{a}. \quad (1)$$

Avem de eliminat pe x între ecuaţia dată şi (1). Ecuaţia căutată este

$$9y^3 - 2p^2y^2 - 5pqy - 2p^3 - q^2 = 0.$$

35. Se dă ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$, $(a, b \in R$ şi $b \neq 1)$, ale cărei rădăcini se notează cu $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$.

Să se arate că suma $S = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$ nu depinde de a.

R. Se observă că

$$S = \sum \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} \Leftrightarrow S = \sum \frac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2};$$

notăm $y_1 = \dfrac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2}$ și formăm ecuația de gradul al treilea cu rădăcini de forma y_1. Deducem $x_1 = \pm \sqrt{\dfrac{1 - y_1}{1 + y_1}}$.

Luăm valoarea pozitivă și scriem că x_1 verifică ecuația din enunț; avem

$$\frac{1 - y_1}{1 + y_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - y_1}{1 + y_1}} + a\frac{1 - y_1}{1 + y_1} + b\sqrt{\frac{1 - y_1}{1 + y_1}} + a = 0.$$

Separăm în această ecuație partea irațională de cea rațională și după o ridicare la pătrat ajungem la ecuația

$$(b - 1)^2y^3 + (b^2 + 2b - 3)y^2 - (b^2 - 2b - 3 - 4a^2)y + 4a^2 - (b + 1)^2 = 0, \qquad (1)$$

(am înlocuit y_1 cu y deoarece forma în x_1 este valabilă și pentru $y_{2,3}$).

Din (1) rezultă imediat că $\sum y_1 = \dfrac{3 + b}{1 - b}$, ceea ce demonstrează problema.

36. Se dă ecuația $x^3 - px^2 + qx - r = a$, ale cărei rădăcini sînt a, b, c. Să se calculeze suma simetrică

$$E = \frac{a^4(b - c)^3 + b^4(c - a)^3 + c^4(a - b)^3}{(a - b)(b - c)(c - a)}$$

în funcție de coeficienții ecuației $(a \neq b \neq c)$.

R. $E = 4p' - q'$.

37. Se dă ecuația $x^3 + px + q = 0$, ale cărei rădăcini sînt x_1, x_2, x_3. Se cere să se calculeze expresia:

$$E = \frac{px_1 + q}{px_1 - q} + \frac{px_2 + q}{px_2 - q} + \frac{px_3 + q}{px_3 - q}, \quad x_1,\ x_2,\ x_3 \neq \frac{q}{p}.$$

R. Se formează ecuația de gradul al treilea ale cărei rădăcini sînt de forma

$$y_1 = \frac{px_1 + q}{px_1 - q}, \qquad (1)$$

dar din (1) rezultă

$$x_1 = \frac{q}{p}\,\frac{y_1 + 1}{y_1 - 1}$$

și scriind că x_1 verifică ecuația din enunț, obținem în final ecuația în y:

$$(q^2 + p^3)y^3 + (3q^2 - 4p^3)y^2 + (3q^2 + 2p^3)y + q^2 = 0$$

și deci

$$E = \frac{4p^3 - 3q^2}{2p^3 + q^2}.$$

38. Se dă ecuația $x^3 + px + q = 0$, ale cărei rădăcini sînt x_1, x_2, x_3. Se cere să se calculeze suma simetrică

$$S = \frac{x_1^2}{x_2^2 + x_3^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2 + x_1^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2},$$

în funcție de coeficienții ecuației date.

R. Se formează ecuația de gradul al treilea ale cărei rădăcini sînt de forma $y_1 = \frac{x_1^2}{x_2^2+x_3^2}$, (1).

Se observă că (1) se poate scrie și sub forma

$$\frac{y_1}{y_1+1} = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \quad (2)$$

dar $x_i^2 = -2p$ și deci (2) se scrie sub forma $\frac{y_1}{y_1+1} + \frac{x_1^2}{-2p}$ de unde rezultă că $x_1 = \pm\sqrt{\frac{-2py_1}{y_1+1}}$ și înlocuind valoarea lui x_1 în ecuația din enunț, obținem în final

$$(q^2+2p^3)y^3 + (3q^2-4p^3)y^2 + (3q^2+2p^3)y + q^2 = 0,$$

de unde rezultă că $S = \sum y_1 = -\frac{3q^2-4p^3}{q^2+2p^3}$.

39. Știind că a, b, c sînt rădăcinile ecuației

$$x^3+px^2+qx+r=0, \text{ cu } r \neq 0$$

să se calculeze expresia $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$ în funcție de coeficienții ecuației.

R. Se observă că

$$a^2 - bc = a^2 + \frac{r}{a} = \frac{a^3+r}{a}.$$

Avem de calculat deci

$$E = \frac{(a^3+r)(b^3+r)(c^3+r)}{abc},$$

Dezvoltînd și făcînd înlocuirile, găsim

$$E = -(\sum a^3b^3 + r\sum a^3);$$

rămîne de calculat $\sum a^3$ și $\sum a^3b^3$, pentru care se folosesc relațiile între coeficienți și rădăcini. Astfel

$$(\sum a)^3 = \sum a^3 + 3[\sum a\sum ab - abc] = -p^3.$$

40. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 4x^3\cos a\cos b + 2x^2(1+\cos 2a+\cos 2b) - 4x\cos a\cos b + 1 = 0.$$

R. Ecuație reciprocă, se scoate în factor x^2 și apoi se notează $x + \frac{1}{x} = y$ și $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Se obțin rădăcinile:

$$x_{1,2} = \cos(a-b) \pm i\sin(a-b)$$

$$x_{3,4} = \cos(a+b) \pm i\sin(a+b).$$

41. Să se rezolve ecuația $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

R. Se scrie $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = (x^2+mx\pm 2)(x^2+nx\mp 1)$, (1) și identificînd în (1) se obține $m=-2$, $n=-1$ și ecuațiile $x^2-2x+2+0$, $x^2-x-1=0$.

42. Se consideră polinomul $P(x) = x^4 + mx + n$. m şi n fiind numere raţionale.

1°. Să se afle m, n dacă polinomul are rădăcina $x = i$.

2°. Să se afle m, n dacă polinomul are rădăcina $1 + \sqrt{3}$ şi să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$ în acest caz.

R. 1°. Din $P(i) = 0$ rezultă $m = 0$, $n = -1$.

2°. $x_{1,3} = 1 \pm \sqrt{3}$, $m = -16$, $n = -12$, $x_{2,4} = -1 \pm i\sqrt{5}$.

43. Să se rezolve ecuaţia $x^4 + 2x^3 + mx^2 - 8x + 12 = 0$, ştiind că între rădăcini există relaţia $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

R. Se pot folosi relaţiile lui *Viète*, observînd însă că $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -1$. Se obţin rădăcinile 1, -2, 2, -3.

44. Să se rezolve ecuaţia $P(x) = x^4 - 4x^2 - 8x - 4 = 0$, ştiind că suma a două rădăcini este egală cu produsul celorlalte două.

R. Se poate folosi metoda identificării, fiind posibile următoarele descompuneri ale lui $P(x)$:

$$P(x) = (x^2 - ax \pm 1)(x^2 + bx + a)$$

$$\text{sau } = (x^2 - ax \pm 2)(x^2 + bx + a)$$

$$\text{sau încă} = (x^2 - ax \pm 4)(x^2 + bx + a)$$

rezultînd din cele de mai sus că nedeterminata a poate avea una din valorile ∓ 4, ∓ 2, ∓ 1. Prin încercări, se găseşte uşor $a = 2$, $b = 2$, rădăcinile rezultînd imediat.

45. Să se rezolve ecuaţia $x^4 - 14x^3 + ax^2 + 2(8 - a)x + 64 = 0$, ştiind că produsul a [illegible] rădăcini este egal cu cea de a patra rădăcină.

R. Trebuie să avem $x_1x_2x_3 = x_4$; dar din $x_1x_2x_3x_4 = 64$ rezultă $x_4^2 = 64$ etc.

46. Să se rezolve ecuaţia $x^4 + x^3 - 4ax^2 + ax + 16 = 0$, ştiind că între rădăcinile sale există relaţia $x_1x_2 = x_3x_4$.

R Din $(x_1x_2)(x_3x_4) = 16$ rezultă că putem avea $x_1x_2 = x_3x_4 = \pm 4$; putem deci scrie $(x^2 + mx \pm 4)(x^2 + nx \pm 4) = x^4 + x^3 - 4ax^2 + ax + 16 = 0$ şi prin identificare rezultă că nu putem lua decît $x_1x_2 = x_3x_4 = 4$, rădăcinile fiind -1, -4 şi 2,2, şi $a = 4$.

Altfel. Se pot folosi şi relaţiile lui *Viète*.

47. Să se rezolve ecuaţia $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + ax - 2 = 0$, ştiind că $x_1 + x_2 = x_3x_4$. (v. 44)

R Se pot folosi relaţiile lui *Viète* sau metoda identificării, observîndu-se că putem scrie: $P(x) = (x^2 - mx - 2)(x^2 + nx + m)$, cu $m = 1$, $a = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \pm i$.

48. Să se rezolve ecuaţia $6x^4 + mx^3 - 75x^2 - 10x + 24 = 0$, ştiind că între rădăcini există relaţia $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_3x_4} = 1$.

R. Din relaţia de condiţie rezultă $x_1x_2 = x_3x_4 = 2$; apoi din relaţiile a doua şi a treia ale lui *Viète* rezultă $x_1 + x_2 = 9$ şi $x_3 + x_4 = -\frac{22}{3}$.

49. Se consideră ecuația $x^4 - (3p + 2)x^2 + p^2 = 0$ și se cere:

1°. Să se determine parametrul real p astfel încît între rădăcinile ecuației să existe relația $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$.

2°. Să se discute natura rădăcinilor cînd p ia valori în R.

3°. Să se rezolve ecuația pentru valorile lui p găsite la pct. 1°.

R. 1°, 3°. Din relațiile de condiție rezultă $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$; cum rădăcinile ecuației bipătrate sînt de forma $-a, -b, b, a$, rezultă că $a = 3b$. Din relațiile 2 și 3 ale lui *Viète* obținem: $3p + 2 = 10b^2$ și $b^4 = \frac{p^2}{9}$, eliminarea lui b^2 între aceste două relații ducînd la

$$p_1 = 6 \text{ și } p_2 = \frac{-6}{19}.$$

Corespunzător acestor valori ale lui p, avem rădăcinile

$$-3\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3\sqrt{2} \text{ și } -3\sqrt{\frac{2}{19}},\ -\sqrt{\frac{2}{19}},\ \sqrt{\frac{2}{19}},\ 3\sqrt{\frac{2}{19}}.$$

2°. Discuția ecuației bipătrate din enunț se face cu ajutorul ecuației $y^2 - (3p + 2)y + p^2 = 0$, unde $x^2 = y$;
pentru $\Delta < 0$ avem rădăcini complexe;
pentru $\Delta \geqslant 0$, $P \geqslant 0$, $S \geqslant 0$ avem patru rădăcini reale;
pentru $\Delta > 0$, $P < 0$ avem două rădăcini reale și două rădăcini complexe.

50. Să se determine rădăcinile ecuației

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6px^2 + (8 - 12p)x + 5 = 0$$

care verifică relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

R Se poate considera în general ecuația

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, în care $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; folosind formulele lui *Viète* se obține relația $a^3 - 4ab + 8c = 0$, care este verificată și de coeficienții ecuației din enunț.

51. Se dă ecuația: $4(1 + a^2)x^4 - 8(a^2 + a + 1)x^3 - (a^2 - 16a + 1)x^2 + 2(a^2 + a + 1)x - 4a = 0$,
unde a este un parametru real. Se cere:

1°. Să se rezolve ecuația știind că admite și rădăcini raționale independente de a.

2°. Să se arate că oricare ar fi a, ecuația are trei rădăcini reale cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

3°. Să se determine valorile lui a pentru care ecuația dată are o rădăcină dublă.

4° Să se determine valorile lui a pentru care are loc relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{17}{2}$.

R. 1°. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{2a}{1 + a^2}$.

2° Avem $-1 \leqslant \frac{2a}{1 + a^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow (a + 1)^2 \geqslant 0$, $(a - 1)^2 \geqslant 0$ ceea ce demonstrează că ecuația are trei rădăcini aparținînd intervalului $[-1, 1]$.

3°. Se scrie

$$\frac{2a}{1+a^2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow a = (\pm 2 \pm \sqrt{3}),$$

ecuația $\frac{2a}{1+a^2} = 2$, avînd rădăcini complexe, problema nu are soluții deoarece $a \in R$ (prin enunț).

4°. $\frac{a}{1+a^2} = \pm 1 \Rightarrow a_{1,2} \in C$, problema nu are soluție deoarece $a \in R$.

52. Să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 - (a^2 - a + 1)x^2 + (a^2 - a + 2)x + 2a(a - 1) = 0$ știind că are și rădăcini independente de a.

R. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = a$, $x_4 = 1 - a$.

53. Se dă ecuația $P(x) = 2x^4 - x^3 + mx + n = 0$ și se cere să se determine parametrii reali m, n și apoi să se rezolve ecuația știind că admite o rădăcină multiplă de ordinul trei.

R. $P''(x) = 6x(4x - 1)$; din $P''(x) = 0$ rezultă că putem avea ca rădăcină multiplă de ordinul trei fie pe $x = 0$, fie pe $x = \frac{1}{4}$ și corespunzător avem rezultatele:

m	n	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	$1/2$
$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

54. Să se rezolve ecuația $x^4 + x^3 - ax^2 - (a + 2)x - 2 = 0$, cu $a \in R$ știind că are o rădăcină triplă întreagă.

R. Rădăcina nu poate fi decît $+1$ sau -1 (deoarece $x_1x_2x_3x_4 = -2$); astfel fiind, putem pune:

$x^4 + x^3 - ax^2 - (a + 2)x - 2 = (x \pm 1)^3((x \mp 2)$. Fără dificultate, găsim $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $a = 3$.

Altfel. Se pot folosi și formulele lui *Viète.*

Altfel. Se pune condiția ca $P'(x)$ și $P''(x)$ să aibă un divizor comun de gradul unu și unde $P(x)$ este membrul întîi al ecuației.

55. Se consideră ecuația $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sînt parametri reali.

1°. În cazul cînd $a = 5$ și $c = -2$, să se determine valoarea lui b astfel ca între rădăcinile ecuației să existe relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ și în acest caz să se rezolve ecuația.

2°. Dacă $b = 2a$, $c = 3(1 - a)$, să se arate că ecuația admite o rădăcină $x_4 = 1$ și să se determine valorile lui a astfel încît celelalte rădăcini x_1, x_2, x_3 să satisfacă inegalitatea:

$$\frac{x_1}{x_3x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_2x_1} < 1.$$

R. 1°. Din $\Sigma x_1 = 4$ rezultă $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2$; putem deci scrie $x^4 - 4x^3 + 5x^2 + bx - 2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 2)$. Rezultă $x_{1,2} = 1 \pm i$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$, $b = -2$,

2°. Ecuația se scrie $x^4 - 4x^3 + 3 + (x^2 + 2x - 3)a = 0$, observîndu-se că o rădăcină este $x_4 = 1$, celelalte rădăcini fiind date de ecuația $x^3 - 3x^2 + (a-3)x + 3a - 3 = 0$. (1) Dar inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3} < 0 \qquad (2)$$

și folosind relațiile între coeficienți și rădăcini din (1), inegalitatea (2) conduce la soluția $a \in (-\infty, -12) \cup (1, \infty)$.

56. Se dă ecuația $ax^4 + bx^2 + cx + d = 0$ și se cere să se găsească relația dintre coeficienții a, b, c, d astfel încît rădăcinile ecuației să îndeplinească condiția $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$.

R. Se formează ecuația de gradul patru ale cărei rădăcini sînt de forma $y_1 = x_1^2$, (1). Din (1) se scoate $x_1 = \sqrt{y_1}$ și scriind că x_1 este o rădăcină a ecuației din enunț se obține

$$a^2y^4 + 2aby^3 + (b^2 + 2ad)y^2 + (2bd - c^2)y + d^2 = 0. \qquad (2)$$

În ecuația (2) se pune condiția să avem: $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$ etc.

57. Să se determine a din ecuațiile

$$P_1(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - a = 0 \text{ și } P_2(x) = x^3 - 3x + a - 1 = 0$$

astfel încît acestea să aibă o rădăcină comună.

R. $a = 3$, divizorul comun fiind $p(x) = x - 1$.

58. Se dau ecuațiile

$$P_1(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 2a = 0.\ P_2(x) = x^3 + ax - 2 = 0$$

și se cere să se determine a și să se rezolve cele două ecuații știind că au două rădăcini comune.

R. Se poate folosi algoritmul lui *Euclid* și punînd condiția ca ultimul împărțitor să fie de gradul al doilea, se scrie că restul corespunzător este nul și se obține $a = 1$.

Altfel. Se poate folosi metoda scăderilor repetate, $p(x)$ fiind divizorul de gradul al doilea căutat, avem:

$$P_3(x) = P_1(x) - 2xP_2(x) = x^3 + 2(2-a)x^2 + 3x + 2a$$

$$p(x) = P_3(x) - P_2(x) = 2(2-a)x^2 + (3-a)x + 2(a+1) = 0$$

$$p_1(x) = xp(x) - 2(2-a)P_2(x) = (3-a)x^2 + 2(a^2 - a + 1)x + 4(2-a) = 0.$$

Dar $p(x)$ și $p_1(x)$ trebuie să aibă aceleași rădăcini și deci trebuie să avem $\frac{2(2-a)}{3-a} = \frac{3-a}{2(a^2-a+1)} = \frac{2(a+1)}{4(2-a)}$, de unde rezultă $a = 1$.

59. Să se rezolve ecuațiile:

$$P_1(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0 \text{ și } P_2(x) = x^3 + x - 2 = 0$$

știind că au două rădăcini comune.

R. Rădăcinile comune sînt date de cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P_1(x)$ şi $P_2(x)$, divizor care este de gradul al doilea. Folosind algoritmul lui *Euclid* obţinem *c.m.m.d.c.* $= x^2 + x + 2$.

Notă. Se observă că $P_2(x) = (x - 1)(x^2 + x + 2)$ şi cum $x = 1$ nu este o rădăcină a ecuaţiei $P_1(x) = 0$, rezultă că *c.m.m.d.c.* nu poate fi decît $x^2 + x + 2$.

60. Să se rezolve ecuaţiile:

$$P_1(x) = x^3 + x^2 + ax + 2 = 0 \text{ şi } P_2(x) = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + x + b = 0$$

ştiind că au două rădăcini comune.

R. Se pune condiţia ca polinoamele $P_1(x)$ şi $P_2(x)$ să aibă un divizor comun de gradul al doilea; se obţine $a = -1$, $b = -1$, iar rădăcinile comune sînt date de $x^2 - x + 1 = 0$.

61. Se dau ecuaţiile:

$$P_1(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 + cx + 2a = 0 \quad \text{şi} \quad P_2(x) = x^3 + ax^2 - bx - 2 = 0$$

şi se cere să se determine parametrii reali a, b, c astfel încît cele două ecuaţii să aibă un număr maxim de rădăcini comune.

R. Punînd condiţia ca polinoamele $P_1(x)$ şi $P_2(x)$ să aibă un divizor de gradul trei, rezultă sistemul:

$$2a^2 - a + 2b - 7 = 0,$$
$$-2ab + b + c + 4 = 0,$$
$$-2a + 2 = 0$$

cu soluţia $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$, divizorul comun fiind $P_3(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$, rădăcinile comune fiind date de ecuaţia $P_3(x) = 0$, cu $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

62. Să se arate că $x = \text{tg } 9°$ verifică ecuaţia $x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1 = 0$. Care sînt celelalte rădăcini?

R. Unghiul $\theta = 9°$ verifică ecuaţia $\text{tg } 5\theta = 1$; dezvoltînd după formula $\text{tg } n\theta = \frac{C_n^1 \text{tg } \theta - C_n^3 \text{tg}^3 \theta + C_n^5 \text{tg}^5 \theta - \ldots}{C_n^0 \text{tg}^0 \theta - C_n^2 \text{tg}^2 \theta + C_n^4 \text{tg}^4 \theta - \ldots}$ şi luînd $\text{tg } \theta = x$, se obţine ecuaţia

$$x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0,$$

care are o rădăcină $x = 1$. Folosind apoi schema lui *Horner* se găseşte la cît ecuaţia din enunţ, celelalte rădăcini ale acesteia fiind $x_2 = \text{ctg } 9°$, $x_3 = -\text{tg } 27°$ şi $x_4 = -\text{ctg } 27°$.

63. Folosind dezvoltarea $\text{tg } 7\theta$ în funcţie de $\text{tg } \theta$, să se arate că ecuaţia $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$ are ca rădăcini pe:

$\text{tg}^2 \frac{\pi}{7}$, $\text{tg}^2 \frac{2\pi}{7}$, $\text{tg}^2 \frac{3\pi}{7}$. Să se deducă apoi relaţia:

$$S = \frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{7}} = 416.$$

R. Se notează $\operatorname{tg}\theta = t$ și ecuația $\frac{\operatorname{tg} 7\theta}{\operatorname{tg}\theta} = 0$ se scrie

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0, \tag{1}$$

(dezvoltarea lui $\operatorname{tg} 7\theta$ făcîndu-se după formula menționată în exercițiul precedent), ecuația (1) avînd rădăcinile de forma $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{7}$, cu $k = \pm 1$, $k = \pm 2$, $k = \pm 3$. Se notează $t^2 = x$ și ecuația (1) se transformă în $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$ (ecuația din enunț), ale cărei rădăcini sînt: $x_1 = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}$, $x_2 = \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}$, $x_3 = \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}$, (2). Suma S se poate exprima cu ajutorul rădăcinilor din (2): $S = \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}\right)^2$, în care înlocuind rădăcinile prin coeficienții ecuației respective, se găsește $S = 416$.

64. Se dă ecuația $P(x) = ax^5 - x^4 - 4x^3 + ax^2 + 18x - 9 = 0$ cu $a \in Z$, avînd o rădăcină $x_1 = \sqrt{2} + i$; se cere să se determine celelalte rădăcini.

R. Ecuația mai are încă trei rădăcini conjugate cu x_1 și anume: $x_2 = \sqrt{2} - i$, $x_3 = -\sqrt{2} + i$, $x_4 = -\sqrt{2} - i$. Rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sînt date de ecuația $p(x) = x^4 - 2x^2 + 9$; scriind că $P(x)$ se divide la $p(x)$, se obține $a = 2$ și $x_5 = \frac{1}{2}$.

65. Se dă ecuația $P(x) = x^5 + 10x^2 - ax + b = 0$ și se cere să se determine parametrii a, b și apoi să se rezolve ecuația știind că admite o rădăcină multiplă de ordinul trei.

R. $P''(x) = 20x^3 + 20 = 0$, are o singură rădăcină reală $x = -1$; în consecință rădăcina multiplă nu poate fi decît $x_1 = x_2 = x_3 = -1$, pentru care corespunde $a = -15$, $b = 6$ și $x_{4,5} = \frac{3 \pm i\sqrt{15}}{2}$.

66. Să se determine constantele a și b din ecuația $f(x) = 3x^5 - 25x^4 + 60x^3 - 60x^2 + ax + b = 0$, astfel încît aceasta să aibă o rădăcină multiplă de ordin maxim.

R. Se va observa că $f''(x) = 0$ are ca rădăcini pe $x_1'' = 1$ și $x_{2,3}'' = 2 \pm \sqrt{2}$, iar $f'''(x) = 0$ are ca rădăcini pe $x_{1,2}''' = \frac{1}{3}\left(5 \pm \sqrt{7}\right)$; rezultă deci că numai $x = 1$ poate fi rădăcina multiplă de ordinul trei, corespunzător căreia $a = 25$ și $b = -3$.

67. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți reali și a și b două rădăcini reale ale lui $P(x)$; a de ordinul p și b de ordinul q. Să se arate că pentru $(\forall)\lambda \in R$ polinomul $P'(x) + \lambda P(x)$ are în intervalul (a, b) un număr impar de rădăcini, iar a și b sînt rădăcini de ordinul $p - 1$ și respectiv $q - 1$.

R. Potrivit enunțului, putem scrie:

$$P(x) = (x - a)^p (x - b)^q P_1(x) \tag{1}$$

unde $P_1(x)$ este un polinom care nu se anulează în intervalul $[a, b]$. Derivînd în (1), obținem $P'(x) = (x - a)^{p-1}(x - b)^{q-1}P_2(x)$, unde $P_2(x) = [p(x - b) + q(x - a)]P_1(x) + (x - a)(x - b)P_1'(x)$.

Astfel fiind, avem:

$$P'(x) + \lambda P(x) = (x - a)^{p-1}(x - b)^{q-1}P_3(x), \tag{2}$$

unde $P_3(x) = P_2(x) + \lambda(x - a)(x - b)P_1(x)$.

Din (2) rezultă că rădăcinile lui $P'(x) + \lambda P(x)$ diferite de a şi b coincid cu cele ale lui $P_3(x)$.

Dar, avem: $P_3(a) = P_2(a) = p(a - b)P_1(a)$ şi

$$P_3(b) = P_2(b) = q(b - a)P_1(b);$$

rezultă că $P_3(a)\cdot P_3(b) = -pq(a - b)^2P_1(a)\cdot P_1(b) < 0$ şi deci $P_3(x)$ are în intervalul (a, b) un număr impar de rădăcini, de unde se deduce că şi $P'(x) + \lambda P(x)$ are în acelaşi interval un număr impar de rădăcini.

68. Fie $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{11} + i\sin\dfrac{2\pi}{11}$ o rădăcină complexă a ecuaţiei $x^{11} - 1 = 0$. Se cere să se formeze ecuaţia de gradul al cincilea ale cărei rădăcini sînt:

$$\alpha + \alpha^{10},\ \alpha^2 + \alpha^9,\ \alpha^3 + \alpha^8,\ \alpha^4 + \alpha^7,\ \alpha^5 + \alpha^6.$$

R. Se va observa că $\alpha^{10} = \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha^9 = \dfrac{1}{\alpha^2}$ etc. Prin urmare, ecuaţia cerută se deduce din

$$\frac{x^{11} - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^{10} + x^9 + \ldots + x + 1 = 0,$$

în care se face substituţia $x + \dfrac{1}{x} = y$, rezultînd

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

69. Se consideră ecuaţia

$$P(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0, \qquad (1)$$

cu coeficienţi în R, în care se presupune că rădăcinile complexe au acelaşi modul p.

1°. Să se arate că ecuaţia transformată ce se obţine din (1) luînd $y = \dfrac{x^2 + p^2}{x}$ este de gradul al treilea, ale cărei rădăcini se cere a se calcula.

2°. Invers, fiind dată ecuaţia în y

$$y^3 + \lambda y^2 + \mu y + \nu = 0, \qquad (2)$$

să se formeze ecuaţia (1) şi să se deducă din aceasta că relaţiile $e^3 - a^3f^2 = 0$, $abf - de = 0$, (3) sînt necesare pentru ca această ecuaţie să îndeplinească condiţia dată.

Cum ar trebui completate relaţiile (3) pentru ca acestea să fie şi suficiente?

R. 1°. Ecuaţia (1), presupunînd că are şi rădăcini complexe, are o descompunere de forma
$P(x) = (x^2 - 2\alpha x + p^2)(x^2 - \beta x + p^2)(x^2 - \gamma x + p^2) = 0$, iar ecuaţia transformată este de forma

$$(y - 2\alpha)(y - 2\beta)(y - 2\gamma) = 0, \qquad (4)$$

observîndu-se că rădăcinile ecuaţiei (4) se obţin din acelea ale ecuaţiei (1) prin dublarea părţilor reale ale rădăcinilor presupuse complexe.

2°. Plecînd de la ecuația (2) se poate ajunge la ecuația (1) prin substituția $y = \frac{x^2+p^2}{x}$, astfel:

$$(x^2 + p)^3 + \lambda x(x^2 + p^2)^2 + \mu x^2(x^2 + p^2) + \nu x^3 = 0, \qquad (5)$$

și identificînd (1) cu (5), obținem:

$$\lambda = a,\ 3p^2 + \mu = b,\ 2p^2\lambda + \nu = c,\ 3p^4 + \mu p^2 = d,$$

$\lambda p^4 = e$, $p^6 = f$, din aceste relații deducîndu-se

relațiile $e^3 - a^3f^2 = 0$ și $abf - de = 0$, precum și λ, μ, ν.

Avem astfel ecuația în y

$$y^3 + ay^2 + \left(b - \frac{3af}{e}\right)y + c - \frac{2a^2f}{e} = 0, \qquad (6)$$

Rămîne să ne asigurăm că rădăcinile ecuației (6) sînt reale, în care caz condițiile din (3) vor fi și suficiente.

70. Să se formeze ecuația de gradul al șaptelea cu coeficienți în Z avînd una din rădăcini $x = \cos\frac{\pi}{7}$. Care sînt celelalte rădăcini?

Să se deducă ecuația de gradul al treilea avînd cea mai mare rădăcină pe $x = \cos\frac{\pi}{7}$.

R. Se pleacă de la dezvoltarea $\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^7 = \cos\pi + i\sin\pi$ și egalînd partea reală — respectiv cea complexă — din ambii membri, se va observa că $\cos\frac{\pi}{7}$ verifică ecuația $64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = 0$, (1). Arcele α, corespunzătoare rădăcinilor $x_i = \cos\alpha$, care verifică ecuația (1) sînt: $\alpha_1 = \frac{\pi}{7}$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{7}$, $\alpha_3 = \frac{5\pi}{7}$, $\alpha_4 = \pi$, $\alpha_5 = \frac{9\pi}{7}$, $\alpha_6 = \frac{11\pi}{7}$, $\alpha_7 = \frac{13\pi}{7} = 2\pi - \frac{\pi}{7}$ rădăcinile respective fiind $x = -1$, $x_1 = \cos\left(\pm\frac{\pi}{7}\right)$, $x_2 = \cos\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{11\pi}{7}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{9\pi}{7}$. Observîndu-se că în afară de $x = -1$, ecuația (1) admite rădăcini egale două cîte două și că deci se poate pune sub forma unui pătrat perfect multiplicat cu $(x + 1)$, adică avem:

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x + 1)(64x^6 - 64x^5 - 48x^4 + 48x^3 + 8x^2 - 8x + 1) =$$

$$= (x + 1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2 = 0. \qquad (2)$$

Din (2) rezultă că ecuația de gradul al treilea $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ admite ca rădăcini pe $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$, răspunzîndu-se astfel la cea de a doua chestiune din enunț.

71. Fie $a, b, c, \ldots, l$ rădăcinile reale, presupuse distincte, ale unui polinom $P(x)$. Să se exprime cu ajutorul lui $P(x)$ și derivatelor sale succesive, următoarele sume:

$$\sum \frac{1}{x-a},\quad \sum \frac{1}{(x-a)^2},\quad \sum \frac{1}{(x-a)(x-b)}.$$

R. Potrivit enunţului avem $P(x) = \alpha(x - a)(x - b)\ldots(x - l)$, (1) rezultă că $\sum \frac{1}{x - a} = \frac{P'(x)}{P(x)}$ (2), unde $P'(x)$ este derivata lui (Px).

Derivînd în (2) în raport cu x, avem:

$\sum \frac{1}{(x-a)^2} = -\frac{P''_{(x)} P_{(x)} - P'^2_{(x)}}{P^2}$. Acum, ridicînd la pătrat în (2), obţinem:

$$2\sum \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \left(\sum \frac{1}{x-a}\right)^2 - \sum \frac{1}{(x-a)^2} = \frac{P''(x)}{P(x)}.$$

72. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$x^4 - 3x^2 + 2mx + 1 - m^2 = 0,$$

unde m este un parametru real.

R. Mai întîi se rezolvă ecuaţia în raport cu m, obţinîndu-se: $m = x \pm (x^2 - 1)$; pentru $m \in \left[\frac{-5}{4}, \frac{5}{4}\right]$ ecuaţia dată are toate rădăcinile reale etc.

73. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$6x^4 - 5x^3 - mx^2 + 3x - m^2 + m + 2 = 0,$$

după valorile parametrului real m.

R. Procedeu asemănător ca la exerciţiul precedent; se vor discuta ecuaţiile:

$$2x^2 - x - 1 - m = 0 \text{ şi}$$

$$3x^2 - x - 2 + m = 0.$$

74. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$2(m - 1)x^6 + (m^2 + 3)x^4 + (m^2 + 3)x^2 + 2(m - 1) = 0.$$

R. Punem $x^2 = y$ şi se obţine o ecuaţie reciprocă de gradul al treilea cu $y_1 = -1$, $y_{2,3}$ sînt daţi de $2(m - 1)y^2 + (m^2 + 2m + 5)y + 2(m - 1) = 0$, (1). Ecuaţia în x are patru rădăcini reale dacă rădăcinile ecuaţiei (1) sînt reale şi pozitive; dacă y_2, y_3 sînt de semne contrare, atunci ecuaţia în x are numai două rădăcini reale etc.

75. Să se demonstreze că ecuaţia $10x^3 - 6x + 1 = 0$ are trei rădăcini reale şi să se calculeze cu două zecimale exacte cea mai mică rădăcină iraţională şi pozitivă a acestei ecuaţii.

R. Se foloseşte teorema lui *Rolle*, din care se deduce că ecuaţia are trei rădăcini reale; una din acestea este cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ şi are valoarea aproximativă 0,17.

76. Să se calculeze cu trei zecimale exacte rădăcina iraţională a ecuaţiei $x^3 + 4x - 1 = 0$.

R. $x = 0,246$.

77. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x - \alpha = 0$$

folosind: — teorema lui *Rolle*,
— metoda grafică.

R. Tabloul de discuţie cu teorema lui *Rolle* este

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	∞	Concluzii
α \ $f(x)$	$+$	$-(\alpha+4)$	$5-\alpha$	$-(4+\alpha)$	$+$	
$(-\infty, -4)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	Nici o rădăcină reală
-4	$+$	0	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{3}$ $x_3 = x_4 = 1 + \sqrt{3}$
$(-4, 5)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 rădăcini reale
5	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 1$; şi încă 2 rădăcini reale
$(5, \infty)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	2 rădăcini reale

Graficul funcţiei $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$ este dat în figura II-77 din care rezultă aceleaşi concluzii pentru α ca şi în cazul folosirii teoremei lui *Rolle*.

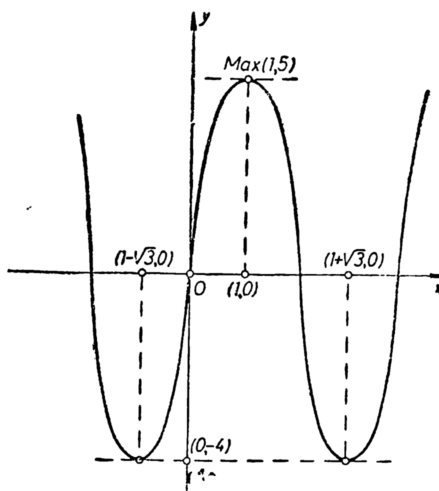


Fig. II — 77

78. Să se discute ecuaţia

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6m(1 - m)x - 1 = 0,$$

unde $m \in R$ este un parametru variabil.

R. Rădăcinile lui $f'(x) = 0$ sînt $x_1' = m - 1$ şi $x_2' = -m$; se obţine apoi $f(m - 1) = -4m^3 + 9m^2 - 6m$ şi $f(-m) = 4m^3 - 3m^2 - 1$.

Deosebim trei cazuri: a) $-m < m - 1$, sau $m > \frac{1}{2}$.

b) $-m = m - 1$, sau $m = \frac{1}{2}$.

c) $-m > m - 1$, sau $m < \frac{1}{2}$.

Pentru formarea şirului lui *Rolle* se studiază separat şi semnul funcţiilor $f_1(m) = -4m^3 + 9m^2 - 6m$ şi $f_2(m) = 4m^3 - 3m^2 - 1$, ceea ce se face cu uşurinţă observînd că $f_1(m) = 0$ şi $f_2(m) = 0$ au cîte o singură rădăcină reală: $m = 0$ şi respectiv $m = 1$.

Discuţia completă a ecuaţiei este dată în tablourile de mai jos.

a) pentru $m > \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-m$	$(m-1)$	$+\infty$	Concluzii
m \ $f(x)$	$-\infty$	$(4m^3 - 3m^2 - 1)$	$(-4m^3 + 9m^2 - 6m)$	$+\infty$	
$1/2$ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$-$	$-$	$-$	$+$	O rădăcină reală $x \in ((m-1), +\infty)$
1	$-$	0	$-$	$+$	$x = 1$ rădăcină dublă şi încă o rădăcină reală în intervalul $((m-1), +\infty)$
$(1, \infty)$	$-$	$+$	$-$	$+$	Trei rădăcini reale

b) $m = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$	$-$	$-\frac{5}{4}$	$+$	O singură rădăcină reală în intervalul $(1/2, +\infty)$

					Concluzii
	$-(-4m^3 + 9m^2 - 6m)$		$(4m^3 - 3m^2 - 1)$	+	
)	−	+	−	+	3 rădăcini reale
	−	0	−	+	$x = -1$ rădăcină dublă și o altă rădăcină reală în $(-m, +\infty)$
	−	−	−	+	O rădăcină reală și două complexe

ecuația $P(x) = x^5 + x^4 - 2mx^3 + (1 - m)x^2 + (1 + m^2)x - m = 0$
ε să se discute natura rădăcinilor acesteia, știind că $P(x)$ este de-
bil în două polinoame, din care unul este de gradul al treilea.

poate scrie $P(x) = (x^3 + ax^2 + bx \pm 1)(x^2 + cx + m)$, (1) și identificînd în (1) $= 0$, $= -m$, $c = 1$ urmînd a se face discuția ecuațiilor $x^3 - mx + 1 = 0$ și $x^2 +$ $= 0$, ceea ce se poate face mai ușor prin metoda grafică.

ε studieze cu ajutorul teoremei lui *Rolle* ecuația

$$x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \mu = 0,$$

consideră că λ și μ sînt coordonatele unui punct din planul axelor are xOy.
separe planul în regiuni după natura rădăcinilor ecuației.

dăcinile ecuației derivate sînt $x_1' = \frac{1}{2}$ și încă două rădăcini $x_{2,3}'$ date de ecuația $-\frac{\lambda - 1}{2}$.
ui *Rolle* este:

	$-\infty$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3 - 2\lambda}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3 - 2\lambda}}{2}$	$+\infty$
	$+\infty$	$\mu - \frac{(\lambda - 1)^2}{4}$	$\mu - \frac{\lambda}{4} + \frac{5}{16}$	$\mu - \frac{(\lambda - 1)^2}{4}$	$+\infty$

observă că $\mu - \frac{(\lambda - 1)^2}{4}$ se poate scrie sub forma

$$-\frac{1}{4}[(\lambda - 1)^2 - 4\mu], \qquad (1)$$

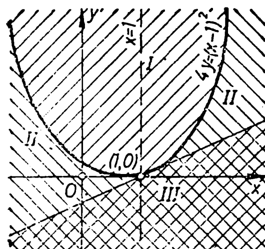


Fig. II — 80

și egalînd (1) cu zero se obține ecuația unei parabole cu vîrful în (1, 0), axa $\lambda - 1 = 0$, tangenta în vîrf $\mu = 0$ parametrul $p = 2$.

$$b)\ \mu - \frac{\lambda}{4} + \frac{5}{16} = 0, \qquad (2)$$

ecuație care reprezintă o dreaptă tangentă la parabola de la punctul *a*) în punctul (3/2, 1/16).

Împărțirea planului în regiuni se vede în figura II-80 iar concluziile sînt redate în tabloul:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3-2\lambda}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-2\lambda}}{2}$	$+\infty$	Concluzii
$f(x)$	$+\infty$	$\mu - \frac{(\lambda-1)^2}{4}$	$\mu - \frac{\lambda}{4} + \frac{5}{16}$	$\mu - \frac{(\lambda-1)^2}{4}$	$+\infty$	
Reg. I	+	+	+	+	+	Nici o rădăcină reală
Reg. II	+	−	+	−	+	Toate rădăcini reale
Reg. III	+	−	−	−	+	Două rădăcini reale

Cînd punctul $P(\lambda, \mu)$ se află pe parabolă avem două rădăcini duble $x_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3-2\lambda}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-2\lambda}}{2}$.

În cazul cînd $P(\lambda, \mu)$ este pe dreapta (2) avem o rădăcină dublă $x_{1,2} = \frac{1}{2}$, celelalte două fiind date de ecuația $x^2 - x + 4\mu = 0$.

Cînd punctul $P(\lambda, \mu)$ se află în punctul de tangență (3/2, 1/16) avem o rădăcină cvadruplă $x = \frac{1}{2}$.

81. Folosind metoda grafică, se cere să se precizeze numărul și natura soluțiilor ecuației $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \pi^2 m = 0$, m fiind un parametru real.

R. Graficul funcției $f(x) = \frac{1}{\pi^2}[(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2]$ este dat în figura II-81, din care rezultă următoarele:

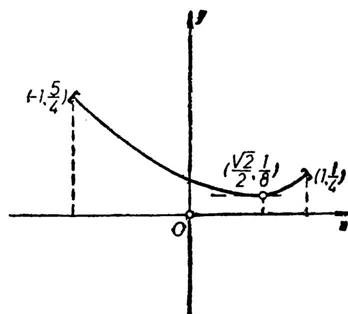


Fig. II — 81

— pentru $m \in \left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$, nici o soluţie;

— pentru $m = \frac{1}{8}$ soluţie dublă $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

— pentru $m \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ două soluţii distincte $x_{1,2} \in [0, 1]$;

— pentru $m \in \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ o soluţie $x \in (0, -1)$;

— pentru $m \in \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$, nici o soluţie.

62. Se dă funcţia $f(x) = |x| e^{\frac{1}{x-2}}$ şi se cere să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = \lambda$ folosind graficul funcţiei $y = f(x)$.

R. În figura II-82 este dat graficul funcţiei $y = f(x)$, din care rezultă următoarele:

— pentru $\lambda = 0$, ecuaţia are două rădăcini reale;

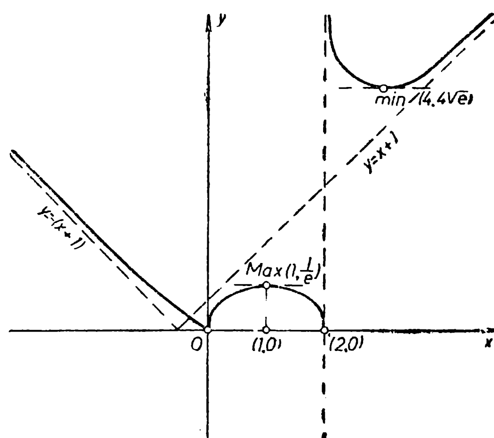


Fig. II – 82

— pentru $\lambda \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ ecuaţia are trei rădăcini reale;

— pentru $\lambda = \frac{1}{e}$, ecuaţia are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 < 0$;

— pentru $\lambda \in \left(\frac{1}{e}, 4\sqrt{e}\right)$, ecuaţia are o singură rădăcină negativă;

— pentru $\lambda = 4\sqrt{e}$, ecuaţia are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = 4$ şi o rădăcină $x_3 < 0$;

— pentru $\lambda \in (4\sqrt{e}, \infty)$, ecuaţia are trei rădăcini reale distincte.

63. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3 - 2x + 1 - \ln|x| = 0$.

R. Din trasarea graficelor funcţiilor $f_1(x) = x^3 - 2x + 1$ şi $f_2(x) = \ln|x|$ — v. figura II-83 — rezultă că ecuaţia dată are o rădăcină dublă $x_2 = x_3 = 1$,

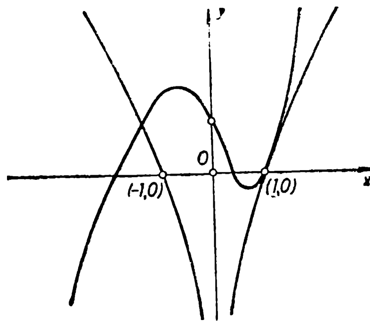


Fig. II — 83

84. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=m$ unde a este un număr pozitiv dat, iar m un parametru real.

R. Trebuie să avem $x \in [-a, a]$ și $m \in R_{+}^{*}$; în aceste condiții, ridicînd la pătrat obținem: $2\sqrt{a^2-x^2}=m^2-2a$, (1).

Dar din (1) rezultă că trebuie să avem $m^2-2a \geqslant 0$, adică $m \geqslant \sqrt{2a}$. Cum $\max(a^2-x^2) = a^2$, rezultă că $\max(m^2-2a) = 2a$, adică $m_{max}=2\sqrt{a}$ și în consecință, pentru $m \in [\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}]$ ecuația dată are două rădăcini, pentru $m = 2\sqrt{a}$ avînd o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = 0$.

Altfel. Se poate folosi metoda grafică, trasîndu-se graficele funcțiilor $y_1 = \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$ și $y_2 = m$ (v. fig. II—84).

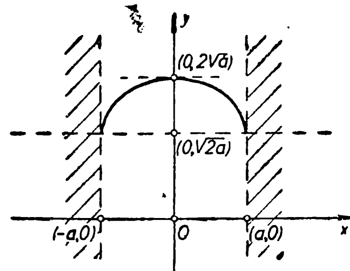


Fig. II — 84

85. Se dă ecuația $f(x) = x^3 + 5x - 1 = 0$ și se cere:

1°. Să se reprezinte grafic $f(x)$.

2°. Să se afle rădăcina irațională a ecuației $f(x) = 0$ cu două zecimale exacte.

3°. Să se evalueze timpul necesar pentru calcularea tuturor zecimalelor rădăcinii iraționale.

4°. Să se demonstreze că ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini raționale.

R. 1°. Graficul este dat în figura II-85.

2°. $x_1 = 0{,}1985$.

3°. $t = \infty$ (avem o infinitate de zecimale).

4°. Aplicînd teorema lui *Rolle* funcției $f(x)$, constatăm că ecuația $f(x) = 0$ are o singură

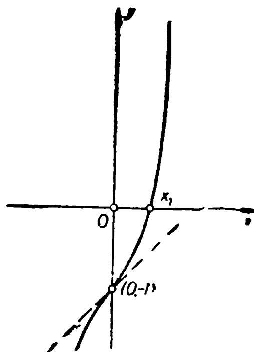


Fig. II — 85

rădăcină reală. Presupunem că aceasta este de forma $x_1 = \frac{p}{q}$ cu $q = +1$ sau -1 şi $p = +1$ sau $-1 \Rightarrow x_1 = +1$ sau -1; dar $f(-1) \neq 0$ şi $f(+1) \neq 0$, de unde se deduce că ecuaţia nu are rădăcini în Q.

86. 1°. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$$

2°. Fie ecuaţia $x^4 - 2x^3 + mx^2 - 2x + 1 = 0$. Să se determine m astfel ca această ecuaţie să aibă o rădăcină reală dublă diferită de 1.

3°. Fie x_3 şi x_4 rădăcinile complexe ale ecuaţiei de la punctul 1°. Să se calculeze

$$E = (x_3 + 1)^n + (x_4 + 1)^n.$$

R. 1°. Este o ecuaţie reciprocă care se poate rezolva cu substituţia $x + \frac{1}{x} = y$, ecuaţia rezolvantă fiind $y^2 - 2y = 0$, cu $y_1 = 0$ şi $y_2 = 2$, de unde rezultă $x + \frac{1}{x} = 2$ şi $x + \frac{1}{x} = 0$, cu $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = \pm i$. 2°. $m = -6$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. 3°. $E = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}$.

87. Se dau polinoamele:

$$P(x, a, b) = x^5 - ax^4 + 15x^2 + bx + a - 1$$

$$I(x, a) = x^3 - (a - 1)x + 1, \text{ unde } a, b \in R.$$

1°. Să se determine a şi b astfel ca $P(x, a, b)$ să se dividă cu $I(x, a)$.

2°. Să se rezolve ecuaţia $Q(x, a) = 0$, $a \in R$, unde $Q(x, a)$ este cîtul împărţirii de la punctul 1°.

3°. Dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei de la 2°, să se determine a în aşa fel ca să avem

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2} > x_1 \cdot x_2.$$

R. 1°. Putem scrie $x^5 - ax^4 + 15x^2 + bx + a - 1 =$

$$= [x^3 - (a - 1)x + 1][x^2 + mx + (a - 1)], \tag{1}$$

şi dezvoltînd în membrul al doilea din (1) şi identificînd, obţinem $m = -a$, $b = -15$. 2°. $x_1 = 1$, $x_2 = a - 1$. 3°. $\forall a \in R/\{2\}$.

88. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + x + m$ și se cere:

1°. Să se determine m și apoi să se rezolve ecuația $P(x) = 0$ știind că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$, unde $x_{1,2,3}$ sînt rădăcinile acestei ecuații.

2°. Pentru m determinat la 1° să se rezolve inecuația $P(|x - 2|) < 12$.

3°. Să se determine m astfel încît ecuația $P(x) = 4x$ să aibă o rădăcină dublă.

R. 1°. $x_{1,2,3}$ fiind rădăcinile ecuației, putem scrie:

$$x_1^5 + x_1^3 + mx_1^2 = 0,$$

$$x_2^5 + x_2^3 + mx_2^2 = 0,$$

$$x_3^5 + x_3^3 + mx_3^2 = 0$$

și adunînd pe coloane, rezultă $S_5 + S_3 + mS_2 = 0$, unde s-a notat $S_k = \Sigma x_1^k$. Ținînd seama că $S_3 = 3x_1x_2x_3$ și că

$S_2 = (S_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2$, din $\Sigma x_1^5 = 10$ rezultă $m = 2$.

2°. Se ține seama că

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{pentru } x \geqslant 2, \\ 2 - x, & \text{pentru } x < 2 \end{cases}$$

și înlocuind, rezultă, inecuațiile

$$(x - 2)^3 + (x - 2) + 2 < 12, \text{ pentru } x \geqslant 2 \text{ și}$$

$$(2 - x)^3 + (2 - x) + 2 < 12, \text{ pentru } x < 12.$$

cu soluția $x \in (0, 4)$.

3°. Ecuația $x^3 - 3x + m = 0$ are o rădăcină dublă pentru $m = \pm 2$ (pentru $m = 2$, $x_1 = x_2 = 1$, iar pentru $m = -2$, $x_1 = x_2 = -1$).

89. Se dă polinomul cu coeficienți reali

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx + c.$$

1°. Să se arate că nu există valori ale coeficienților a, b, c astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $Q(x) = x^3 - x$.

2°. În cazul cînd $P(0) = P(1)$, să se determine a, b, c astfel ca $P(x)$ să admită rădăcina $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. În acest caz să se determine și celelalte rădăcini ale polinomului $P(x)$.

3°. În cazul cînd $a = -2$, să se determine coeficienții b și c astfel ca $P(x)$ să admită o rădăcină triplă diferită de zero.

4°. Pentru $a = -2$, $b = 2$, $c = -1$, să se determine valorile lui $x \in R$, astfel ca $e^{P(x)} \leqslant 1$.

R. 1°. Sistemul format din ecuațiile $P(0) = 0$, $P(1) = 0$ și $P(-1) = 0$ este incompatibil.

2°. Din $P(0) = P(1)$ rezultă $a + b + 1 = 0$; trebuie să avem

$$P(\alpha) = 0 \qquad (1)$$

unde $\alpha = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ este o rădăcină cubică complexă a lui (-1) și ținînd seamă că $\alpha_1^2 = -\alpha_2$, $\alpha_1^3 = -1$, din (1) rezultă $a = -2$, $b = 1$, $c = -2$.

3°. $P''(x) = 12x(x - 1)$ și luînd ca rădăcină triplă pe $x = 1$, din $P(1) = 0$ și $P'(1) = 0$ rezultă $b = 2$ și $c = -1$.

4°. Din $e^{P(x)} \leqslant 1$ rezultă $P(x) \leqslant 0$, sau

$$(x^2 - 1)(x - 1)^2 \leqslant 0.$$

90. Se dă un polinom $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avînd coeficienții a, b, c, d (în această ordine) în progresie geometrică cu rația $q > 0$. Se cere:

1°. Să se arate că ecuația $P(x) = 0$ are o singură rădăcină reală și că rădăcinile acestei ecuații au același modul.

2°. Notînd cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației de la 1°, să se arate că oricare ar fi numărul natural n, suma

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$$

este reală. În ce caz $S_n > 0$?

3°. Pentru $a = 1$, să se determine rația q astfel încît ecuația $P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right) = 12$ să admită rădăcina $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și apoi să se rezolve această ecuație.

R. 1°. Ținînd seama că $b = aq$, $c = aq^2$ și $d = aq^3$, rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt $x_1 = -q$, $x_{2,3} = \pm qi$, toate rădăcinile avînd același modul q.

2°. $S_n = q^n[(-1)^n + i^n + (-i)^n]$, observîndu-se că $S_n \in R$ și dacă $n = 4k$, $S_n > 0$.

3°. Este necesar ca ecuația

$$(x + q)(x^2 + q^2)x^3 + (1 + qx)(1 + q^2x^2) - 12x^3 = 0$$

să se anuleze pentru $x = \omega_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; punîndu-se această condiție (și ținînd seama că $\omega_1 + \omega_2 = -1$, $\omega_1\omega_2 = 1$, $\omega_1^2 = \omega_2$, $\omega_1^3 = 1$) rezultă ecuația $2q^3 - q^2 - q - 10 = 0$, cu $q_1 = 2$ și $q_{2,3} \in C$.

91. 1°. Se dă polinomul $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in R$. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ presupuse dictincte între ele. Să se arate că avem

$$\frac{x_1^2}{P'(x_1)} + \frac{x_2^2}{P'(x_2)} + \frac{x_3^2}{P'(x_3)} = 1,$$

$P'(x)$ fiind derivata lui $P(x)$.

2°. Dacă $Q(x)$ este un polinom de gradul întîi, să se arate că

$$\frac{Q(x_1)}{P'(x_1)} + \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)} + \frac{Q(x_3)}{P'(x_3)} = 0.$$

3°. Să se determine rădăcinile y_1, y_2, y_3 ale ecuației $P(y + a) = 0$ (a este coeficientul lui x^2 din $P(x)$), ca funcții de rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $P(x) = 0$.

Să se arate că dacă $P(x) = 0$ și $P(y + a) = 0$, $a \neq 0$, admit două rădăcini comune, atunci rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt în progresie geometrică.

R. 1°. Putem scrie: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ și $P'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_3)(x - x_1)$; observăm că $P'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$ și asemănător $P'(x_2)$ și $P'(x_3)$. Rezultă că avem de calculat suma simetrică

$$\sum \frac{x_1^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = -\frac{x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)},$$

a cărei valoare este 1.

2°. Luăm $Q(x) = mx + n$ și avem de calculat suma simetrică

$$\sum \frac{mx_1 + n}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$ a cărei valoare este 0.

3°. Se observă că $y_1 = x_1 - a = 2x_1 + x_2 + x_3$ (deoarece $-a = x_1 + x_2 + x_3$) și asemănător y_2, y_3.

Ca ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ să aibă rădăcinile în progresie geometrică, este necesar ca între coeficienții acesteia să existe relația $a^3c - b^2 = 0$, (1),
Punînd condiția ca ecuațiile $P(x) = 0$ și $P(x - a) = 0$ să aibă un divizor de gradul al doilea, regăsim relația (1).

92. Se dă polinomul
$P(x) = m(x - a)^3 + n(x - b)^3 + p(x - c)^3$ cu a, b, c constante date, reale și diferite iar m, n, p trei parametri reali. Să se arate că:

1° Dacă polinomul $P(x)$ este identic egal cu o constantă, atunci el este identic nul.

2°. Dacă $m, n, p \in R_+^*$, $P(x) = 0$ are o singură rădăcină reală.

3°. Dacă $P(a) = P(b) = 0$, atunci $P(c) = 0$.

R. 1°. Din $P(x) = k$, rezultă sistemul

$$m + n + p = 0, \quad am + bn + cp = 0, \quad a^2m + b^2n + c^2p = 0, \tag{1}$$

și pentru ca sistemul (1) să aibă soluții nebanale (diferite de zero) este necesar ca

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Dar, $\Delta_s = (a - b)(b - c)(c - a)$ și deci ecuația din (2) nu poate fi satisfăcută decît dacă $a = b$, sau $b = c$, sau $c = a$, ceea ce contrazice enunțul.

$$2°. \; P'(x) = 3[m(x - a)^2 + n(x - b)^2 + p(x - c)^2], \tag{3}$$

și cum $m, n, p \in R_+^*$, din (3) rezultă că $P'(x) > 0$ și deci $P(x) = 0$ nu are decît o singură rădăcină reală (conform teoremei lui *Rolle* și $P(x)$ fiind de grad impar).

$$3°. \text{ Din } P(a) = n(a - b)^3 + p(a - c)^3 = 0$$

$$P(b) = m(b - a)^3 + p(b - c)^3 = 0$$

rezultă, prin scădere, că $m(c - a)^3 + n(c - b)^3 = 0$, ceea ce nu este altceva decît $P(c) = 0$.

Capitolul III

Structuri algebrice

1. Se definesc pe Z următoarele legi de compoziție internă:

$$x \top y = 2x + 2y + xy + 1,$$

$$x \perp y = x + y + 2xy + 1.$$

Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x^2 \top y^2 = 6,$$

$$x^2 \perp y^2 = 5.$$

R. Compunînd elementele după legile definite, se obține sistemul:

$$2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 + 1 = 6,$$

$$x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 1 = 5$$

cu soluțiile: $(1, 1)$; $(1, -1)$; $(-1, 1)$; $(-1, -1)$.

2. Pe Z se definesc următoarele legi de compoziție internă:

$$a * b = a + b + ab,$$

$$a \circ b = a + b - ab.$$

Să se arate că:

a) legile sînt comutative și asociative;

b) admit același element neutru e;

c) există inegalitatea pentru $a \neq 0$.

$$\left(a * \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a \circ \frac{1}{a}\right) > (e * 1) \circ (e \circ 1).$$

R. Legile sînt evident comutative și asociative; $e = 0$, iar inegalitatea este evidentă după compunerea elementelor.

3. Pe R se definește legea: $x \Delta y = 2x + y$.

a) Legea este comutativă? Dar asociativă?

b) Fie a un număr real dat. Să se calculeze:

$$a_2 = a \Delta a, \quad a_3 = a_2 \Delta a, \quad a_4 = a_3 \Delta a, \ldots, a_n = a_{n-1} \Delta a.$$

Să se arate că $a_n = (2^n - 1)a$.

R. Legea nu este comutativă și nici asociativă. Pentru punctul *b*) se calculează a_2, a_3, $a_4, \ldots$ și se deduce expresia lui a_n, care se demonstrează prin inducție completă.

4. Se defineşte pe C legea:

$$z\Delta z' = zz' + i(z + z') - (1 + i).$$

a) Să se arate că această lege este o lege de compoziţie internă, comutativă şi asociativă.

b) Să se determine elementul neutru al acestei legi.

c) Să se arate că există un singur număr complex care nu admite simetric faţă de această lege.

R. Compunînd pe $z = a + bi$ cu $z' = a' + b'i (a, a', b, b' \in R)$ după legea dată, se ajunge tot la un număr complex $A + Bi$ $(A, B \in R)$. Elementul neutru este $1 - i$, iar elementul care nu admite simetric este $-i$.

5. Pe R se defineşte legea de compoziţie internă $\top$ prin relaţia:

$$x \top y = axy + b(x + y) + c, \quad a, b, c \in R, \; a \neq 0, \; b \neq 0.$$

a) Care este relaţia între a, b şi c pentru ca această lege să fie asociativă?

b) Relaţia obţinută fiind presupusă satisfăcută, să se arate că această lege admite un element neutru e şi că orice număr real, cu excepţia unuia singur, care se va preciza, admite un simetric.

R. $b^2 = ac + b$; $e = \dfrac{1 - b}{a}$ pentru $x \neq -\dfrac{b}{a}$.

6. Pe R este definită o lege de compoziţie astfel:

$$m * n = \frac{m - n}{m + n}, \quad m \neq -n.$$

a) Să se arate că oricare ar fi $k \in R - \{0\}$ avem:

$$k * (m * n) = k * \frac{1}{n} * \frac{1}{m}.$$

b) Să se rezolve ecuaţia: $(k - x) * k = x * \left(\dfrac{1}{k} + k\right)$.

c) Să se simplifice expresia:

$$(P_1 + P_2) * (P_1 - P_2), \text{ unde } P_1 = x + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}}}$$

şi $P_2 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} : \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1}$ şi $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$.

R. a) Făcînd compunerea elementelor în membrul drept se ajunge la membrul stîng;

b) $x = \dfrac{k(k^2 + 1)}{2k^2 + 1}$.

c) Obţinem $\dfrac{P_2}{P_1}$ după compunere, iar în final avem:

$$\frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

7. Pe R este definită legea de compoziție notată prin:

$$\forall(x, y) \in R^2,\ xy \neq 1 \quad x \top y = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Să se arate că această lege determină pe $R - \{xy = 1\}$ o structură de grup abelian.

R. Asociativitatea și comutativitatea rezultă imediat, $e = 0$, $x' = -x$.

8. Notăm cu E mulțimea numerelor întregi impare și fie $a, b, c, \ldots$ elementele acestei mulțimi. Se definește pe E operația: $a * b = a + b + 1$.

Ce structură algebrică determină legea pe E?

R. Legea este peste tot definită. Este asociativă și comutativă. $e = -1$, $a' = -(a + 2)$; Deci grup abelian.

9. Pe Z se introduc operațiile: Δ, $\top$ definite astfel:

$$x\Delta y = x + y + 5, \quad x \top y = x + y - 5.$$

a) Să se arate că cele două operații determină pe $Z \times Z$ grupuri abeliene.

b) Să se arate că cele două grupuri sînt izomorfe, izomorfismul fiind realizat de aplicația $f(x) = -x$.

R. a) $e_\Delta = -5$, $e_\top = 5$, $x'_\Delta = -(x + 10)$, $x'_\top = 10 - x$.

b) Aplicația este bijectivă, iar $f(x\Delta y) = f(x) \top f(y)$.

10. Definim pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ legea de compoziție internă:

$x * y = \arcsin(\sin x + \sin y)$.

a) Să se arate că această lege determină pe această mulțime o structură de grup abelian.

b) Să se arate că:

$$[(x * y) * x] * y = \arcsin\left(4 \sin\frac{x + y}{2} \cos\frac{x - y}{2}\right).$$

c) Să se calculeze:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{m=1}^{n}(x * y)^m + K\pi\right).$$

11. Notăm cu A mulțimea tripletelor de numere reale de forma (a, b, c) $a \neq 0$, $c \neq 0$. Prin definiție elementele:

$(a_1; b_1; c_1) = (a_2; b_2; c_2)$ dacă: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. În mulțimea A definim legea de compoziție internă:

$$(a_1; b_1; c_1) * (a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2; a_1b_2 : + b_1c_2; c_1c_2).$$

a) Să se arate că această lege determină pe A o structură de grup.

b) Să se calculeze $(1; 1; 1)^n$, $n \in N$, înțelegînd prin aceasta aplicarea legii de n ori.

R. a) Legea este asociativă, dar nu este comutativă, $e = (1; 0; 1)$. Elementul simetric este: $\frac{1}{a_1}, -\frac{b_1}{a_1c_1}, \frac{1}{c_1}$.

b) Se calculează din aproape în aproape, apoi se demonstrează prin inducție completă relația obținută.

12. Definim pe mulțimea $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ legea de compoziție internă:
$x \top y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$.

Să se arate că această lege determină pe această mulțime o structură de grup comutativ.

R. $e = 0$, $x' = -x$.

13. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Să se arate că orice matrice pătrată de ordinul doi pentru care avem $A \cdot X = X \cdot A$ este de forma

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \ a, b \in R.$$

b) Să se calculeze X^n.

c) Fie M mulțimea tuturor matricelor pătrate de ordinul doi determinate la punctul a). Să se arate că M înzestrată cu adunarea obișnuită formează grup comutativ.

d) Fie M^* mulțimea matricelor de forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; \ a > 0, \ b \in R.$$

Să se arate că M^* înzestrată cu operația de înmulțire formează grup comutativ.

e) Fie $f: M \to M^*$ definită prin:

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^x & ye^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

Să se arate că f este un izomorfism între $(M, +)$ și $(M^*, \cdot)$.

R. a) Notînd $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, scriind $A \cdot X = X \cdot A$, făcînd înmulțirile și punînd condiția de egalitate a două matrice, rezultă: $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

b) Calculînd pe X^2, X^3, X^4... deducem că $X^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$, care se demonstrează prin inducție că este adevărată.

c), d) Se verifică ușor axiomele grupului.

14. Fie C_1 mulțimea numerelor complexe de modul 1.

1°. Să se demonstreze că în C_1 avem relația $a + b - ab + 1 = 0 \Leftrightarrow a + b + ab - 1 = 0$, (1), unde $a, b \in C_1$. Să se determine cuplele (a, b) care verifică ecuația

$$a + b - ab + 1 = 0. \qquad (2)$$

2°. Se consideră mulţimea $C_1' = C_1 - \{\pm i\}$ în care se defineşte operaţiunea $*$ astfel $a * b = \dfrac{a + b + ab - 1}{a + b - ab + 1}$ şi se cere să se arate că operaţiunea notată prin $*$ este o lege de compoziţie internă în C_1' şi că $(C_1' *)$ formează un grup comutativ.

R. Notînd prin $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ conjugatele numerelor complexe a şi b, trebuie să avem relaţia

$$a + b - ab + 1 = 0 \Leftrightarrow \bar{a} + \bar{b} - \overline{ab} + 1 = 0, \quad (1')$$

dar cum $a\bar{a} = b\bar{b} = 1$ (prin enunţ), relaţia a doua din (1′) devine $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{ab} + 1 = 0$, (1″) sau, eliminînd numitorii, (1″) se transformă în $a + b - ab + 1 = 0$ şi $a + b + ab - 1 = 0$, ceea ce demonstrează echivalenţa relaţiilor (1) din enunţ.

Cuplele (a, b) care satisfac ecuaţia $a + b - ab + 1 = 0$ sînt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} a + b - ab + 1 = 0 \\ a + b + ab - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a + b = 0 \\ ab = 1 \end{matrix}, \text{ cu } \begin{cases} a = \pm i \\ b = \mp i \end{cases},$$ cuplele $(i, -i)$ şi $-i, i)$ fiind singurele care verifică ecuaţia (2).

2°. Fie a, b două elemente aparţinînd mulţimii C_1': avem:

$$|a * b|^2 = \frac{a + b + ab - 1}{a + b - ab + 1} \cdot \frac{\bar{a} + \bar{b} + \overline{ab} - 1}{\bar{a} + \bar{b} - \overline{ab} + 1} = \frac{a + b + ab - 1}{a + b - ab + 1} \cdot \frac{a + b - ab + 1}{a + b + ab - 1} = 1$$

şi deci $|a * b| = 1$ şi prin urmare $a * b \in C_1'$.

Pe de altă parte, nu putem avea $a * b = \pm i$, căci ar trebui să avem $(a * b)^2 + 1 = 0$, adică $(a + b - ab - 1)^2 + (a + b - ab + 1)^2 = 0$, sau încă $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = 0$, egalitate incompatibilă cu faptul că a şi b aparţin mulţimii C_1' (definită la pct. 2° din enunţ). Astfel fiind, operaţiunea $*$ este o lege internă în C_1'. Această lege este comutativă. rămîne să demonstrăm asociativitatea, adică să arătăm că $(a * b) * c = a * (b * c)$, ceea ce se demonstrează fără dificultate.

Existenţa elementului neutru: din $a * e = a$ rezultă $a + e + ae - 1 = (a + e - ae + 1)a$ sau ceea ce este echivalent cu $(1 + a^2)e = 1 + a^2$, de unde $e = 1$.

Elementul simetrizabil: din $a * a' = 1$ rezultă că trebuie să avem $a + a' + aa' - 1 = a + a' - aa' + 1 = 1$, sau $aa' = 1 \Rightarrow a' = \dfrac{1}{a} = \bar{a}$.

În consecinţă, mulţimea C_1' formează un grup comutativ faţă de legea de compoziţie.

15. Fie $(R, +)$ grupul aditiv al numerelor reale şi $(M, \cdot)$ grupul multiplicativ al matricelor nesingulare de ordinul 3. Să se cerceteze dacă aplicaţia $U: (R, +) \to (M_3, \cdot)$ definită prin: $U_{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t^2 + 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ este un izomorfism de grupuri.

R. Aplicaţia este bijectivă, $U_{(x+y)} = U_{(x)} \cdot U_{(y)}$.

$$U_{(x+y)} = \begin{bmatrix} 1 & x + y & 2(x + y)^2 + 2(x + y) \\ 0 & 1 & 4(x + y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{(x)} \cdot U_{(y)} = \begin{bmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & y & 2y^2 + 2y \\ 0 & 1 & 4y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x + & 2y^2 + 2y + 4xy + 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x + 4y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Pe mulțimea $M = \left\{ A/A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}, \quad a, \ b, \ c \in R, \ a \neq -2 \right\}$ se introduce legea de compoziție $*$ astfel:

$A * B = A \cdot B + 2(A + B + E)$, E fiind matricea unitate de ordinul trei

a) Este legea de compoziție peste tot definită?
b) Este asociativă? Este comutativă?
c) Admite element neutru?
d) Toate elementele sînt simetrizabile?
e) Ce structură algebrică determină pe M?

R. a) Este peste tot definită.

b) Da.

c) $e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $A' = \begin{bmatrix} -\dfrac{2a + 3}{a + 2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{b}{(a + 2)^2} & -\dfrac{2a + 3}{(a + 2)} & 0 \\ \dfrac{b^2 - c(a + 2)}{(a + 2)^3} & -\dfrac{b}{(a + 2)^2} & -\dfrac{2a + 3}{a + 2} \end{bmatrix}$

e) Grup abelian.

17. Pe mulțimea $R \times R$ definim legile de compoziție:

$$(a, \ b) \oplus (a', \ b') = (a + a', \ b + b')$$

$$(a, \ b) \odot (a', \ b') = (aa', \ ab' + a'b).$$

Să se arate că cele două legi determină pe $R \times R$ o structură de inel comutativ cu element unitate.

R. Prima lege determină pe $R \times R$ o structură de grup abelian $e_{\oplus} = (0,0)$. $(a, \overline{b}) = (-a, -b)$.

A doua lege este peste tot definită, este asociativă și comutativă, $e_{\odot} = (1, 0)$ pentru $a \neq 0$,
Legea a doua este distributivă față de prima lege:

$$(a, b) \odot (a', b') \oplus (a'', b'') = ((a, b) \odot (a', b') \oplus (a, b) \odot (a'', b''))$$

$$(a, b) \odot (a' + a'', b' + b'') = (aa', ab' + a'b) \oplus (aa'', ab'' + a''b).$$

$$(aa' + aa'', ab' + ab'' + a'b + a''b) = (aa' + aa'', ab' + a'b + ab'' + a''b).$$

18. Pe mulțimea $M = \begin{bmatrix} a + bi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in R$ se consideră legile de compoziție internă $\top$ și $\perp$ definite astfel:

$$\forall M_1, M_2 \in M, \; M_1 \top M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \perp M_2 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + i b_1 b_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De asemenea, se consideră pe C legea de compoziție internă definită astfel:

$$\forall Z_1, Z_2, \; Z_1 \Delta Z_2 = a_1 a_2 + i b_1 b_2.$$

Să se demonstreze că:

a) Tripletele $(M, \top, \perp)$, $(C, +, \Delta)$ sînt inele unitare.

b) Inelele $(M, \top, \perp)$, $(C, +, \Delta)$ sînt izomorfe, izomorfismul fiind realizat de aplicația:

$$f(M) = a + bi, \; f: M \to C.$$

19. Pe R_+^2 se definesc următoarele legi de compoziție internă:

$$\forall x, y \in R, \qquad x * y = x^{\ln y},$$

$$x \Delta y = e^{\ln xy}.$$

a) Să se arate că: $(R_+, *)$ și (R_+, Δ) sînt grupuri abeliene.

b) Tripletul $(R_+, *, \Delta)$ este corp comutativ.

c) Se consideră mulțimea numerelor reale înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire. Să se arate că:

$f: (R, +, \cdot) \to (R_+, *, \Delta)$ prin $f(x) = e^x$ este izomorfism.

20. Se notează cu $(Q, *, 0)$ mulțimea numerelor raționale în care sînt definite operațiunile $a * b = a + b - 1$ și $a \circ b = a + b - ab$. Să se demonstreze că tripletul $(Q, *, 0)$ este un corp.

R. Se verifică ușor că operația „$*$" este asociativă, comutativă, are element neutru pe $e = 1$ și element simetrizabil pe $\overline{a} = 2 - a$; această mulțime formează un grup abelian.

Operația „∘" este asociativă, are element neutru pe $e = 0$ și element simetric pe $\bar{a} = \frac{a}{a-1}$ (cu $a \neq 1$). Rămîne de studiat distributivitatea operațiunii „∘" față de „*". Ambele operațiuni fiind comutative, este suficient de studiat doar distributivitatea la dreapta. Avem $a \circ (b * c) = a \circ (b + c - 1) = 2a + b + c - ab - ac - 1$ și $(a \circ b) * (a \circ c) = (a + b - ab) * (a + c - ac) = (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1 = 2a + b + c - ab - a - 1$.

Operațiunea este deci distributivă față de „*" și în consecință mulțimea $(Q, *, \circ)$ este un corp.

21. În inelul Z_6 să se rezolve ecuația :

$$\hat{4} \cdot \hat{x} + \hat{5} = \hat{3}.$$

R. Adăugînd la ambele părți ale ecuației $\hat{1}$ avem :

$$\hat{4} \cdot \hat{x} + \hat{5} + \hat{1} = \hat{3} + \hat{1} \Rightarrow \hat{4} \cdot \hat{x} + \hat{0} = \hat{4} \Rightarrow \hat{4} \cdot \hat{x} = \hat{4} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = \hat{1} \\ \hat{x}_2 = \hat{4} \end{cases}.$$

22. În inelul Z_{12} să se rezolve sistemul :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = \hat{6},$$

$$\hat{2}\,\hat{x} + \hat{3}\,\hat{y} + \hat{4}\,\hat{z} = \hat{8},$$

$$\hat{3}\,\hat{x} + \hat{2}\,\hat{y} + \hat{z} = \widehat{10}.$$

R. Substituindu-l pe $\hat{x}$ din prima ecuație în celelalte două ecuații, obținem :

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{6} + \widehat{11}\,\hat{y} + \widehat{11}\,\hat{z}, \\ \hat{y} + \hat{2}\,\hat{z} = \hat{8}, \\ \widehat{11}\,\hat{y} + \widehat{10}\,\hat{z} = \hat{4}, \end{cases} \quad \Rightarrow \hat{y} = \hat{8} + \widehat{10}\,\hat{z},$$

care introdus în ecuația a treia conduce la :

$$\hat{0} \cdot \hat{z} = \hat{0} \Rightarrow \hat{z} = \text{arbitrar}.$$

Soluții : $(\widehat{10} + \hat{z},\ \hat{8} + \widehat{10}\,\hat{z},\ \hat{z})$.

23. În corpul Z_7 să se rezolve ecuația $\hat{3} \cdot x\hat{4} = \hat{5}$.

R. Adunăm în ambii membri $\hat{3}$.

$$\hat{3} \cdot \hat{x} + \hat{4} + \hat{3} = \hat{5} + \hat{3} \Rightarrow \hat{3} \cdot \hat{x} + \hat{0} = \hat{8} \Rightarrow \hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{1}.$$

Înmulțim ambii membri cu $\hat{3}^{-1} = \hat{5}$.

$$\hat{5} \cdot \hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{5} \cdot \hat{1} \Rightarrow \hat{x} = \hat{5}.$$

24. În corpul Z_5 să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\hat{3}\cdot\hat{x} + \hat{y} + \hat{2}\cdot\hat{z} = \hat{3},$$

$$\hat{x} + \hat{2}\cdot\hat{y} + \hat{3}\cdot\hat{z} = \hat{1},$$

$$\hat{2}\cdot\hat{x} + \hat{3}\cdot\hat{y} + \hat{z} = \hat{2}.$$

R. Rezolvat prin substituție avem succesiv:

$$\begin{cases} \hat{y} = \hat{3} + \hat{2}\cdot\hat{x} + \hat{3}\cdot\hat{z}, \\ \hat{x} + \hat{2}(\hat{3} + \hat{2}\cdot\hat{x} + \hat{3}\cdot\hat{z}) + \hat{3}\cdot\hat{z} = \hat{1}, \\ \hat{2}\cdot\hat{x} + \hat{3}(\hat{3} + \hat{2}\cdot\hat{x} + \hat{3}\cdot\hat{z}) + \hat{z} = \hat{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{y} = \hat{3} + \hat{2}\cdot\hat{x} + \hat{3}\cdot\hat{z}, \\ \hat{4}\cdot\hat{z} = \hat{0}, \\ \hat{3}\cdot\hat{x} = \hat{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x} = \hat{1}, \\ \hat{y} = \hat{0}, \\ \hat{z} = \hat{0}. \end{cases}$$

25. În inelul claselor de resturi modulo 12 să se rezolve sistemul:

$$\hat{2}\hat{x} + \hat{3}\hat{y} + \hat{4}\hat{z} = \hat{7},$$

$$\hat{3}\hat{x} + \hat{4}\hat{y} + \hat{6}\hat{z} = \hat{9},$$

$$\hat{4}\hat{x} + \hat{6}\hat{y} + \hat{2}\hat{z} = \widehat{10}.$$

(Se observă că toți coeficienții necunoscutelor sînt divizori ai lui zero.)

R. Sistemul se poate rezolva prin metoda reducerii. Înmulțind prima ecuație cu $\hat{3}$ și a doua cu $\hat{2}$ obținem:

$$\hat{6}\hat{x} + \hat{9}\hat{y} = \hat{9},$$

$$\hat{6}\hat{x} + \hat{8}\hat{y} = \hat{6}.$$

Adunîndu-le, avem: $\hat{5}\hat{y} = \hat{3}$, înmulțită cu $\hat{5}^{-1}$ dă:

$\hat{y} = \hat{3}$ etc.

Observație: recomandăm să se verifice care din tripletele obținute sînt soluții.

26. În corpul claselor de resturi modulo 7 să se rezolve sistemul:

$$\hat{2}\hat{x} + \hat{3}\hat{y} + \hat{4}\hat{z} = \hat{5},$$

$$\hat{3}\hat{x} + \hat{2}\hat{y} + \hat{5}\hat{z} = \hat{2},$$

$$\hat{4}\hat{x} + \hat{5}\hat{y} + \hat{3}\hat{z} = \hat{4}.$$

R. Adunînd $\hat{4}\,\hat{y}+\hat{3}\,\hat{z}$ într-o parte și în alta la prima ecuație, apoi înmulțind cu $\hat{2}^{-1}=\hat{4}$, obținem $\hat{x}=\hat{6}+\hat{2}\,\hat{y}+\hat{5}\,\hat{z}$.

Substituind în celelalte ecuații, avem:

$$\hat{y}+\hat{6}\,\hat{z}=\hat{5},$$

$$\hat{6}\,\hat{y}+\hat{2}\,\hat{z}=\hat{1}.$$

Adunînd membru cu membru, avem:

$$\hat{0}\,\hat{y}+\hat{1}\,\hat{z}=\hat{6}\Rightarrow\hat{z}=\hat{6}.\ \text{În final: } (\hat{2},\ \hat{4},\ \hat{6}).$$

Partea a doua

Analiză matematică

Capitolul IV

Şiruri — limite de şiruri

1. Să se arate că şirurile:

$$u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad v_n = \frac{a^n - 1}{a^n + 1}, \quad w_n = \frac{(-1)^n + 1}{2} + (-1)^n \frac{n + 1}{3n + 1}$$

sînt mărginite, $a > 0$ şi $n \in N^*$.

R. Şirul u_n cu $u_1 = \frac{1}{2}$ este crescător deoarece $u_n < u_{n+1}$. Calculînd cîţiva termeni ai şirului, de exemplu: $u_{10} = \frac{199}{101}$ ..., $u_{50} = \frac{4\,999}{2\,501}$, $u_{100} = \frac{19\,999}{10\,001}$, se observă că aceştia se apropie de 2 cînd n creşte.

Se poate scrie deci: $u_n < 2$.

În consecinţă, şirul respectiv este mărginit superior de 2.

Şirul v_n este constant cînd $a = 1$. Pentru $a \in (0, 1)$ şirul este descrescător, primul termen fiind $\frac{a-1}{a+1}$; se observă însă că $v_n = 1 - \frac{2}{a^n + 1} > -1$, deci $v_n \in \left[-1, \frac{a-1}{a+1}\right]$, şirul fiind mărginit superior de 0. Cînd $a \in (1, \infty)$, şirul este mărginit inferior de $\frac{a-1}{a+1}$, iar superior de 1.

Şirul w_n este mărginit inferior de $-\frac{1}{2}$, iar superior de $\frac{10}{7}$, observîndu-se că:

$$w_1 = -\frac{1}{2}, \quad w_2 = \frac{10}{7}, \quad w_n - w_{n+1} = (-1)^n \left[1 + \frac{n+1}{3n+1} + \frac{n+2}{3n+4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_n - w_{n+1} < 0, \text{ pentru } n = \text{impar} \\ w_n - w_{n+1} > 0, \text{ pentru } n = \text{par.} \end{cases}$$

2. Să se arate că şirurile

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ şi}$$

$$v_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

sînt monotone şi mărginite.

R. Avem $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} > 0$ și deci $u_{n+1} > u_n$ pentru orice $n \in N$, șirul fiind monoton. Apoi observăm că $u_n < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} < 1$, șirul este mărginit fiind deci și convergent.

Pentru v_n avem de asemenea $v_{n+1} < v_n$, apoi se ține seama că $v_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ aceasta rezultînd din $\dfrac{1}{n(u+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

3. Să se arate că șirurile

$$u_n = \frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}$$

$$v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

$$w_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

sînt convergente.

R. Pentru u_n se observă că $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{1+(n+1)^2} < 1$, pentru orice $n \in N$ și în consecință șirul este monoton și mărginit.

Pentru v_n se observă că $v_{n+1} > v_n$, deoarece $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$; șirul este deci monoton Pentru a arăta că este și mărginit se pleacă de la inegalitatea $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, observîndu-se că avem: $v_n < 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum\limits_{2}^{n} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$ sau: $v_n < 1 + \left[\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)\right]$, sau încă $v_n < 2 - \dfrac{1}{n}$, adică $v_n < 2$. Șirul fiind monoton și mărginit este convergent.

Pentru w_n se observă că $w_{n-1} - w_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ și deci șirul este monoton. Cum însă avem inegalitatea evidentă

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\ldots 2}, \text{ rezultă că } w_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad (1)$$

sau încă $w_n < 2$ (2 fiind suma progresiei geometrice din (1)). În consecință, șirul fiind monoton și mărginit este convergent.

4. Să se studieze natura șirurilor

$$u_n = \frac{2n^2+n}{n^2+1}, \quad v_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}.$$

R. Pentru u_n: din studiul semnului expresiei $(u_{n+1} - u_n)$ se deduce că $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ după care $u_4 > u_5 > u_6 > u_7$, $u_3 = u_7$ și în fine $u_7 > u_8 > \ldots > u_n$, pentru v_n se va observa că $v_1 > v_2 > v_3 > v_4 > v_5$, apoi $v_5 < v_6 < v_7 < \ldots < v_n$ și că $v_3 = v_7$. Ambele șiruri sînt mărginite și convergente.

5. Să se studieze șirurile

$$u_n = \frac{n-2}{n^2+1},\ v_n = \frac{n-1}{n^2+1},\ w_n = \frac{n^2-5n+4}{n^2+n+1},$$

trăgîndu-se concluziile corespunzătoare asupra monotoniei etc.

R. Pentru u_n se va observa că : $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ și că $u_4 > u_5 > u_6 > \ldots > u_n$; pentru v_n se va observa că : $v_1 < v_2 = v_3$ și că $v_3 > v_4 > \ldots > v_n$; pentru $w_n : w_1 > w_2 > w_3$, $w_1 = w_4$ și că $w_4 < w_5 < w_6 \ldots < w_n$.

6. Să se demonstreze că șirul $a_n = \dfrac{2n^2 - n}{n^2+1}$ are limita 2.

R. Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încît să aibă loc inegalitatea $|a_n - 2| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Într-adevăr, avem

$$\left|\frac{2n^2-n}{n^2+1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+2}{n^2+1} < \varepsilon, \text{ sau încă}$$

$n^2\varepsilon - n + \varepsilon - 2 > 0$ de unde rezultă că

$n > \dfrac{1}{2\varepsilon} + \dfrac{\sqrt{1+4\varepsilon(2-\varepsilon)}}{2\varepsilon}$, (1) sau $n > N(\varepsilon)$ unde s-a notat cu $N(\varepsilon)$ membrul al doilea din (1). De exemplu, dacă luăm $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ rezultă $N(\varepsilon) = E\left[50\left(1 + \sqrt{1{,}08}\right)\right]$* și deci $n > 100$.

(Se înțelege că în (1) trebuie pusă condiția $1 + 4\varepsilon(2-\varepsilon) \geq 0$.)

7. Se consideră șirul $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+1}$ și se cere să se demonstreze că are limita 2 și apoi să se determine rangurile începînd de la care toți termenii șirului diferă de 2 cu mai puțin de $\dfrac{3}{101}$.

R. Din $|a_n - 2| < \varepsilon$, rezultă $n > \sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon} - 1}$ și notînd $N(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon} - 1}\right)$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ (ε oricît de mic și în orice caz < 2) îi corespunde un $N(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon} - 1}\right)$, astfel că pentru orice $n > N(\varepsilon)$ inegalitatea $|a_n - 2| < \varepsilon$ este satisfăcută. Luînd $\varepsilon = \dfrac{3}{101}$, rezultă $N\left(\dfrac{1}{101}\right) = 10$. Astfel fiind, începînd de la termenul de rangul 11 (inclusiv), toți termenii ce urmează în șir diferă de 2 cu mai puțin de $\dfrac{3}{101}$.

8. Să se arate că șirul

$$u_n = \cos a \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2^2} \ldots \cos\frac{a}{2^n}$$

este monoton și mărginit și să se calculeze limita pentru $n \to \infty$.

---

* Unde $E(\alpha)$ reprezintă cel mai mare număr natural cuprins în α.

R Se observă că $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\cos\frac{a}{2^{n+1}}\right| \leqslant 1$ deci şirul este monoton şi mărginit.
Apoi, se ţine seama de următoarele relaţii:

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a},\ \cos\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}},\ \ldots,\ \cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{a}{2^n}},$$

avînd deci $u_n = \frac{\sin 2a}{2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}}$ şi cînd $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{\sin 2a}{2a}$, ţinînd seama că

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{a}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2^n}} = a.$$

9. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}$ are limita 1.

R. Este necesar să fie satisfăcută inegalitatea $|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} + 1 - \sqrt{n+1} <$ $< \varepsilon\sqrt{n+1}$, sau încă $\sqrt{n} + 1 < \sqrt{n+1}(\varepsilon + 1)$, (1). Ridicînd la pătrat în (1) şi efectuînd calcule obţinem $N(\varepsilon') = E\left(\frac{2 - \varepsilon' + 2\sqrt{1-\varepsilon'}}{\varepsilon'}\right)$, unde s-a notat $\varepsilon' = (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)^2$, $1 - \varepsilon' \geqslant 0$.

Luînd, de exemplu, $\varepsilon' = \frac{19}{100}$, rezultă că $N(\varepsilon') = 19$ şi prin urmare, pentru $n > 19$ avem îndeplinită inegalitatea $|u_n - 1| < \varepsilon$, unde $(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)^2 = \frac{19}{100}$.

10. Să se demonstreze că limita şirului $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2n+1}$ este egală cu 1.

R. Trebuie să arătăm că $|a_n - 1| < \varepsilon$, pentru orice $\varepsilon > 0$; înlocuind obţinem

$$\sqrt{n^2+1} - (n+1) < \varepsilon(2n+1),$$

sau încă $(n + 1) + (2n + 1)\varepsilon > \sqrt{n^2 + 1}$, ceea ce este adevărat pentru $\forall n \in N$ şi $\varepsilon > 0$, observînd că $(n + 1) > \sqrt{n^2 + 1}$.

11. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n\, n!}$ are limită şi apoi să se calculeze această limită.

R. Şirul este monoton, deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{3(n+1)} < 1$ şi este mărginit deoarece $0 < u_n < 1$; limita este zero.

12. Să se calculeze limita şirului

$$u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}.$$

R. Se pleacă de la inegalitățile evidente

$1! < n!,\ 2! < n!, \ldots, (n-1)! < n!$ adevărate pentru orice $n > 1$;

astfel fiind rezultă că

$$0 < u_n < \frac{n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{n \cdot 1 \cdot 2 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots n(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}.$$

Dar, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} = 0$ și prin urmare și $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

13. Să se calculeze limitele șirurilor

$$u_n = na^n, \text{ cu } |a| < 1.$$

$$v_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}.$$

R. Deoarece $|a| < 1$, putem lua $|a| = \frac{1}{1+k}$, $k > 0$ și $|a^n| = \frac{1}{(1+k)^n} < \frac{2}{n(n-1)k^2}$.

Astfel fiind, $u_n = n|a^n| < \frac{2}{(n-1)k^2}$ și dacă se ia un $\varepsilon > 0$, rezultă că avem $\frac{2}{(n-1)k^2} < \varepsilon$ pentru $n > \frac{2}{k^2\varepsilon} + 1$. În concluzie există un $N(\varepsilon) = E\left(\frac{2}{k^2\varepsilon} + 1\right)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ avem $n\,|a^n| < \varepsilon$, concluzia fiind că $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$.

Pentru v_n, se ține seama că $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. Se deduce fără nici o dificultate că $0 < \sin\frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{3^n}$, pentru $\forall n \in N$ și prin urmare avem și dubla inegalitate

$0 < n^2 \sin\frac{\pi}{3^n} < n^2\frac{\pi}{3^n}$; cum însă $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{\pi}{3^n} = 0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

14. Să se calculeze limitele șirurilor:

$$u_n = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right),\quad v_n = n^2\left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2\right),\quad w_n = n^2\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right).$$

R. Se ține seama că $\lim_{n\to\infty} u_n = \ln a$ și că $v_n = u_n^2 \cdot a^{-\frac{2}{n}}$; apoi $w_n = n^2 a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$ limita fiind $\ln a$.

15. Să se calculeze limita șirurilor

$$u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \text{ cu } a,\ b > 0,\quad v_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n,$$

$$\text{cu } a_k > 0 \text{ și } k = 1, 2, \ldots, m.$$

R. Se poate scrie:

$$u_n = \left[1 + \frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} - 2\right)\right]^n; \text{ apoi}$$

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} - 2\right) = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) + n\left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

luîndu-se în considerare rezultatele de la ex. 14 limita este $\sqrt{ab}$.

Limita lui v_n este $\sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_m}$.

16. Să se calculeze limitele șirurilor

$$u_n = n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n} \text{ și } v_n = n \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n}\right) \text{pentru } n \to \infty.$$

R. Se observă că se poate scrie

$u_n = \ln \left[1 - \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)\right]^{n^2}$; limita este $-\frac{\pi^2}{2}$. De asemenea, se poate scrie:

$$v_n = n\left\{1 - \left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n}\right)\right]\right\}^n, \text{ limita fiind } 2\pi.$$

17. Să se calculeze limita șirului

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

R. Notăm cu $p_n = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}$ și ținem seama că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n}$. Limita lui u_n este 1.

Să se calculeze limitele șirurilor:

18. $$u_n = \sqrt[n]{\frac{n \ln n}{n^{\ln n}}} \text{ pentru } n \to \infty:$$

R. Pentru ușurință se notează $v_n = \frac{n \ln n}{n^{\ln n}}$ și cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

19. $$u_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}}, \text{ cu } n \geqslant 2.$$

R. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{\ln n}{n^2}} = 1.$

20. Să se calculeze limita șirului

$$u_n = \sin\frac{a}{n^2} + \sin\frac{3a}{n^2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)a}{n^2}, \tag{1}$$

cu $a \neq 0$, pentru $n \to \infty$.

R. Suma din membrul al doilea din (1) este $S_n = \frac{\sin^2 \frac{a}{n}}{\sin \frac{a}{n^2}}$ (ceea ce se poate arăta, aso-ciind lui u_n, șirul $v_n = \cos\frac{a}{n^2} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)a}{n^2}$ și calculînd apoi suma $S_n = v_n + iu_n$ folosindu-se formula lui *Moivre*).

Astfel fiind, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a.$

21. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \text{arc tg} \frac{1}{2k^2}.$$

R. Se ține seamă de egalitatea

$\text{arc tg} \frac{1}{2k^2} = \text{arc tg} \frac{k}{k+1} - \text{arc tg} \frac{k-1}{k}$ în care făcînd succesiv $k = 1, 2, \ldots, (n+1)$ și apoi adunînd pe coloane, rezultă

$$a_n = \text{arc tg} \frac{n+1}{n+2} \text{ și deci } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}.$$

22. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$b_n = \left(\frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^{k=n+1} \text{arc tg } 2k^2 \right)^n.$$

R. Se ține seamă de egalitatea:

$\text{arc tg } 2k^2 = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg} \frac{1}{2k^2}$, în care făcînd succesiv pe $k = 1, 2, \ldots, (n+1)$ și adunînd pe coloane obținem

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \text{arc tg } 2k^2 = (n+1)\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{n+1} \text{arc tg} \frac{1}{2k^2}, \qquad (1)$$

Luînd în considerare exercițiul anterior și (1), rezultă că $b_n = \left\{\frac{2}{n\pi}\left[(n+1)\frac{\pi}{2} - a_n\right]\right\}^n =$

$$= \left[1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{2a_n}{n\pi}\right)\right]^n. \qquad (2)$$

Dar $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{2a_n}{n\pi}\right) = 0$, astfel încît, trecînd la limită în (2), avem $\lim_{n\to\infty} b_n =$

$$= e^{\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{2a_n}{\pi}\right)} = e^{1 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

23. Să se calculeze limita șirului

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

R. Se pleacă de la dubla inegalitate evidentă

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} =$$

în care făcînd $k = 1, 2, \dots, n$, aceasta devine

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \qquad (1)$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$, precum şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} = 1$;

Astfel fiind, din (1) rezultă că $\lim u_n = 1$.

Să se calculeze limitele şirurilor:

/ 24.
$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \text{ pentru } n \to \infty.$$

R. Se observă că putem scrie:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\cdots\left[\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\right]\cdot\left[\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

şi cînd $n \to \infty$ limita este $\frac{1}{2}$.

/ 25.
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

R. Se ţine seama de identităţile: $k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1)$ şi $k^3 + 1 = (k+1)(k^2 - k + 1)$, apoi se procedează ca la exerciţiul anterior, limita fiind $\frac{2}{3}$.

/ 26.
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

R. Se observă că avem: $k^2 + k - 2 = (k-1)(k+2)$; limita este $\frac{1}{3}$.

27. Să se calculeze limita şirului

$$u_n = \frac{E(a) + E(2^2a) + \dots + E(n^2a)}{n^3}$$

pentru $n \to \infty$, (unde s-a notat prin $E(a)$ cel mai mare număr natural cuprins în numărul real a).

R. Se ştie că pentru $\forall n \in N$ şi $\forall a \in R$ au loc inegalităţile:

$$n^2a - 1 < E(n^2a) \leqslant n^2a \qquad (1)$$

și făcînd în (1) succesiv $n = 1, 2, \ldots$, obținem:

$$n = 1: \quad a - 1 < E(a) \leqslant a$$

$$n = 2: 2^2a - 1 < E(2^2a) \leqslant 2a^2a$$

$$\vdots$$

$$n = n: n^2a - 1 < E(n^2a) \leqslant n^2a$$

și adunînd pe coloane obținem:

$$a(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - n < E(a) + E(2^2a) + \ldots + E(n^2a) \leqslant a(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2). \quad (2)$$

Acum în (2) împărțim la n^3 și înlocuim $\sum_{n=1}^{n} n$ cu $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ și apoi trecem la limită, rezultînd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(a) + E(2^2a) + \ldots + E(n^2a)}{n^3} = \frac{a}{3}.$$

La același rezultat se ajunge dacă se aplică teorema lui *Stolz**. Notăm cu (α_n) șirul de la numărător și (β_n) șirul de la numitor, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[E(a) + E(2^2a) + \ldots + E(n+1)^2a] - [E(a) + \ldots + E(n^2a)]}{(n+1)^3 - n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{E[(n+1)^2a]}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{a}{3} \text{ și deci } \lim u_n = \frac{a}{3}.$$

28. Să se calculeze limita șirului

$$u_n = \frac{E(a) + E(3^2a) + \ldots + E[(2n-1)^2a]}{n^3},$$

pentru $n \Rightarrow \infty$.

R. Se poate aplica teorema lui *Stolz* sau prima metodă arătată la exercițiul precedent; în cazul aplicării teoremei lui *Stolz* avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[(2n+1)^2a]}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{4}{3} a \text{ și } \lim u_n = \frac{4}{3} a.$$

29. Să se calculeze limita șirului

$$u_n = \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt[3]{3} + \ldots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

---

* Fie $(a_n)_{n\in N}$ un șir arbitrar și $(b_n)_{n\in N}$ un șir divergent. Dacă:
1°. $(b_n)_{n\in N}$ este strict monoton.

2°. există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A$,

atunci există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$. — Teorema lui *Stolz*.

R. Notînd cu a_n şirul de la numărător şi b_n **şirul de la numitor**, pentru limita lui u_n se poate aplica teorema lui *Stolz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \sqrt[n+1]{n+1}}{6(n+1)^2} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\text{deoarece } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1\right) \text{ şi deci } \lim u_n = \frac{1}{6}.$$

30. Să se calculeze limitele şirurilor:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \quad v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n}.$$

R. Pentru u_n, se calculează mai întîi limita şirului $u_n' = \sqrt[n]{n\,!}$, observînd că putem **scrie** $\ln u_n' = \frac{\ln n\,!}{n}$ şi aplicînd acum teorema lui *Stolz*, **avem**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)\,! - \ln n\,!}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty\,;$$

prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n' = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\infty} = 0.$

Pentru v_n se observă că $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, rezultă că

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; cu precizarea că $\frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n} > 0$, pentru orice $n \geqslant 2$

$$\text{şi } \lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{\ln n} = 0.$$

31. Să se calculeze limitele şirurilor:

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \ldots + \frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right]$$

$$v_n = n\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2(n+1)}\right]$$

pentru $n \Rightarrow \infty$.

R. Pentru primul şir, se aplică teorema lui *Stolz*, limita fiind egală cu $\frac{a}{c}$; pentru **cel** de-al doilea şir punem $a_n = n^n$ şi avem:

$$v_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}\left[\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right];$$

$$\text{dar } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \text{ şi prin urmare}$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = e \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right]. \quad (1)$$

În (1) luăm $\frac{a_{n+1}}{a_n} = w_n$ şi $w_n' = n$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = e \lim_{n\to\infty}\left(\frac{w_{n+1} - w_n}{w_{n+1}' - w_n'}\right) = e^2.$$

32. Să se calculeze limitele șirurilor:

$$u_n = \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \ldots + (\ln n)^2}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$v_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$w_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right),$$

pentru $n \to \infty$.

R. Se aplică teorema lui *Stolz*, limitele respective fiind ∞ sau 0, după cum $\alpha < 1$ sau $\alpha > 1$; 0 ; 0.

33. Să se calculeze limita șirului

$$u_n = \frac{1^p + 3^p + 5^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}.$$

R. Se aplică teorema lui *Stolz* ; limita este $\frac{2^p}{p+1}$.

34. Să se calculeze limitele șirurilor

$$u_n = \frac{\ln n}{n}, \quad v_n = \frac{n}{a^n}, \quad w_n = \frac{a^n}{n!}, \text{ pentru } n \to \infty.$$

R. Pentru u_n, se aplică teorema lui *Stolz*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0 \text{ și deci } \lim u_n = 0.$$

Din aceasta rezultă imediat că și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$.

Pentru v_n, mai întîi logaritmăm și avem

$$\ln v_n = \ln n - n\ln a = n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln a\right)$$

$$\text{și acum } \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln a\right)$$

$$= \begin{cases} -\infty, & \text{pentru } a < 1 \\ +\infty, & \text{pentru } a \in (0, 1) \end{cases}$$

și prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, pentru $a > 1$ și ∞ pentru $a \in (0, 1)$.

Asemănător se poate calcula și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \begin{cases} +\infty, & \text{pentru } a > 1 \\ 0, & \text{pentru } a < 1. \end{cases}$$

Pentru W_n, se poate aplica teorema lui *Stolz*; avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} - a^n}{(n+1)! - n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n(a-1)}{n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n!}$$

apoi se ține seama de rezultatele anterioare.

Capitolul V

Limite de funcții, continuitatea funcțiilor

1. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5} - 5}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x^2+5x+23} - 9}, \text{ pentru } x \to 2$$

$$\text{și } g(x) = \frac{\sqrt{3x^3 - 10x + 13} + \sqrt[3]{5x^2 - 16x + 11} - 6}{\sqrt[4]{27x - 65} + \sqrt[3]{8x^2 - 25x + 4} - 3}, \text{ pentru } x \to 3.$$

R. Ambele limite prezintă nedeterminări de forma $\frac{0}{0}$.

Pentru $f(x)$ se observă că putem scrie:

$$f(x) = \frac{\dfrac{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2}{\sqrt{x+4}+2} + \dfrac{(\sqrt{x^2+5})^2 - 3^2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{\dfrac{(\sqrt{3x-2})^2 - 2^2}{\sqrt{3x-2}+2} + \dfrac{(\sqrt{4x^2+5x+23})^2 - 7^2}{\sqrt{4x^2+5x+23}+7}}.$$

Se efectuează calculele, se simplifică cu $(x-2)$ și se obține $\frac{11}{27}$. Pentru $g(x)$ se procedează similar, observînd că numitorul se poate scrie sub forma

$$\left(\sqrt[4]{27x-65} - \sqrt[4]{2^4}\right) + \left(\sqrt[3]{8x^2 - 25x + 4} - \sqrt[3]{1}\right);$$

limita este $\frac{314}{817}$.

2. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \text{ cu } x \in R^*_+, \text{ cînd } x \to 0_+$$

$$\text{și } g(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + \ldots \sqrt{x^{2^n} + \sqrt{x}}}}} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 + \sqrt[4]{x^8 + \sqrt[4]{x}}}} \text{ cînd } x \to \infty.$$

R Cazuri de nedeterminare de forma $\infty - \infty$ şi $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru $f(x)$ se înmulţeşte şi se împarte cu conjugata, limita fiind $\frac{1}{2}$; pentru $g(x)$ se simplifică cu $\sqrt{x}$, limita fiind

$$\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt[4]{2}}.$$

3. Să se găsească limita funcţiei

$$f(x) = \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} - x$$

pentru $x \to \infty$.

R Caz de nedeterminare $\infty - \infty$; se înmulţeşte şi se împarte cu conjugata, limita fiind

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

4. Să se determine limita funcţiei

$$f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + x^2 + bx + c} - (bx + c)$$

cînd $x \to \infty$, a, b, c fiind parametri reali şi pozitivi.

R Cînd $x \to \infty$, avem o nedeterminare de forma $\infty - \infty$; dar $f(x)$ se poate scrie sub forma:

$$f(x) = \frac{(a-b^3)x^3 + (1-3b^2c)x^2 + (b-3bc^2)x + c - c^3}{\sqrt[3]{(ax^3+x^2+bx+c)^2} + \sqrt[3]{(ax^3+x^2+bx+c)}(bx+c) + (bx+c)^2}$$

rezultînd următoarele:

— dacă $a \neq b^3$, limita este $+\infty$ dacă $a > b^3$ şi $-\infty$ dacă $a < b^3$;

— dacă $a = b^3$ şi $1 - 3b^2c \neq 0$, limita este $\frac{1-3b^2c}{3b^2}$;

— dacă $a = b^3$ şi $c = \frac{1}{3b^2}$, limita este 0.

5. Să se determine constantele $a > 0$ şi $b > 0$, astfel încît limita funcţiei

$$f(x) = \sqrt[5]{ax^5 + (b+1)x^4 + 1} - \sqrt[5]{bx^5 + x^4 - 1}$$

pentru $x \to \infty$, să fie egală cu 2.

R. Limita prezintă o nedeterminare de forma $\infty - \infty$; se înmulţeşte şi se împarte cu conjugata lui $f(x)$; se obţine $a = b = 10^6$

6. Să se determine α astfel încît funcţia

$$f(x) = \sqrt[m]{\alpha^3x^m + x^2 + 1} + \sqrt[m]{(\alpha-2)x^m + x + 1}$$

să aibă o limită finită cînd $x \to \infty$ (m impar şi > 2).

R. $\alpha = 1$.

Să se calculeze limitele funcţiilor

7. $f(x) = \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{x+a}{x-b}\right)^x$ şi $h(x) = \left(\frac{x+a}{x-a+b}\right)^x$

pentru $x \to \infty$.

R Cazuri de nedeterminare de forma 1^∞; se observă că putem scrie: $f(x) = \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{x-a}\right]^{\frac{x}{x-a}}$, limita fiind e^{2a}. Analog se poate proceda şi pentru celelalte două funcţii, limitele fiind e^{a+b} şi respectiv e^{2a-b}.

8. $f(x) = \left(\frac{a+bx}{a+b}\right)^{\frac{2}{x-1}}$, $g(x) = \left(\frac{a+\frac{b}{x}}{a+b}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ pentru $x \to 1$.

R. Cazuri de nedeterminare de forma 1^∞. Pentru $f(x)$, notăm $\frac{1}{x-1} = z$ şi cînd $x \to 1$, $z \to \infty$; astfel fiind, putem scrie: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(1 + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{z}\right)^z = e^{\frac{b}{a+b}}$,

Pentru $g(x)$ procedăm analog, limita fiind $e^{-\frac{b}{a+b}}$.

9. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{\sin x}}, \text{ pentru } x \Rightarrow 0.$$

R. Nedeterminare de forma 1^∞; putem scrie însă:

$$f(x) = \left[1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]^{\frac{1}{\sin x}} = \left[\left(1 + 2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}x}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x(1-\operatorname{tg}x)}}$$

limita fiind e^2.

10. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = (\cos x - 2\sin x)^{\frac{1}{x}}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R Limita se prezintă sub forma nedeterminată 1^∞: putem scrie însă:

$$f(x) = [1 - (1 - \cos x + 2\sin x)]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[1 - 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{x}},$$

limita fiind e^{-2},

11. Să se calculeze limita funcției $f(x) = x^{\sin x}$, cînd $x \to 0_+$.

R. Nedeterminare de forma 0^0; se logaritmează, observînd că:

$$\ln f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot (x \ln x), \tag{1}$$

și cînd $x \Rightarrow 0_+$ limita din (1) este 0 și deci limita lui $f(x)$ este 1.

12. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{\ln x}} \text{ cu } x \in R_+^*, \text{ cînd } x \to \infty;$$

R. Nedeterminare pe forma ∞^0; se observă însă că putem scrie:

$$(x+1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}} = e^{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}$$ și, trecînd la limită, se obține e.

13. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \left(\frac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sin x}, \quad g(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}, \quad h(x) = (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}},$$

pentru $x \to 0$.

R. Limitele prezintă nedeterminări de forma ∞^0 și respectiv 1^∞. Pentru $f(x)$ se logaritmează și avem:

$$\ln f(x) = (1+\cos x)(2-\cos x)\frac{\ln\dfrac{2-\cos x}{1-\cos x}}{\dfrac{2-\cos x}{1-\cos x}}, \tag{1}$$

și cum $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\cos x}{1-\cos x} = +\infty$, rezultă că limita din (1) este 0 și în consecință limita lui $f(x)$ este 1.

Pentru $g(x)$, se logaritmează, observînd că putem scrie

$$\ln g(x) = -\frac{\sin\frac{x}{2}\cos x}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \frac{\ln\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}, \tag{2}$$

limita din (2) pentru $x \to 0$ fiind 0 și deci limita lui $g(x)$ este 1. Pentru $h(x)$ se poate pune:

$\cos\sqrt{x} = 1 - z$, limita este $e^{-\frac{1}{2}}$.

14. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = x^3\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right), \text{ cînd } x \to \infty.$$

R. Limita prezintă o nedeterminare de forma $\infty \times 0$: dar putem scrie:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{e^{\frac{-1}{x(x+1)}} - 1}{-\frac{1}{x(x+1)}} \cdot \frac{x^2}{x(x+1)}, \qquad (1)$$

observindu-se acum că limita este $+\infty$, primii doi factori din (1) avînd limita 1.

15. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = (1 + \text{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}, \quad g(x) = \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$h(x) = \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)^{\text{ctg}\, x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Cazuri de nedeterminare de forma 1^∞. Se va observa însă că putem scrie:

$$f(x) = \left[(1 + \text{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{\text{tg}^2 \sqrt{x}}}\right]^{\frac{\text{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}}, \text{ limita fiind } \sqrt{e};$$

$$g(x) = \left[1 + \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{x^2}}, \text{ limita fiind } \sqrt{e^3};$$

$$h(x) = \left(1 + \frac{2}{\frac{\cos x - \sin x}{\sin x}}\right)^{\text{ctg}\, x}, \text{ limita fiind } e^2.$$

16. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}, \text{ pentru } x \to 0,$$

$$h(x) = x\frac{\ln^2(1+x) - \ln^2 x}{\ln x}, \text{ pentru } x \to \infty.$$

R. Pentru $f(x)$: se aduce la acelaşi indice şi apoi se înmulţeşte şi împarte cu conjugata numărătorului, limita fiind $\frac{m-n}{2mn}$.

$$\text{Apoi, } h(x) = \left[1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right] \cdot x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

şi cum $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln \frac{1+x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$, rezultă că limita lui $h(x)$ este egală cu 2.

17. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{1}{x}(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx),$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx)$$

$$\text{şi } h(x) = \frac{1}{x^k}(\sin^k x + \sin^k 2x + \ldots + \sin^k nx),$$

pentru $x \to 0$.

R. Se ţine seama că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{x} = n$, limitele respective fiind:

$$\sum_1^n n, \ \sum_1^n n^2, \ \sum_1^n n^k.$$

18. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \ldots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x},$$

pentru $x \to \frac{\pi}{2}$.

R. Se ţine seama că $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$ şi limita lui $f(x)$ este $\frac{n!}{2^n}$.

19. Se dă funcţia $f(x) = \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \ldots (1 - \sqrt[n]{\cos x})}{x^{2n-2}}$

cu $n \geqslant 2$: să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

R. Se ţine seamă că

$$1 - \sqrt[k]{\cos x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \sqrt[k]{\cos x} + \ldots + \sqrt[k]{\cos^{k-1} x}} \quad \text{şi că}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[k]{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}. \text{ Rezultă că limita este } \frac{1}{2^{n-1} k!},$$

Să se calculeze limitele funcţiilor:

20. $$f(x) = \left[\frac{\ln(1 + x)}{\ln x}\right]^x, \text{ cînd } x \to \infty.$$

R. Limita prezintă o nedeterminare de forma 1^∞; în rezolvare se va ţine seama că

$\frac{\ln(1 + x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}$ (pentru orice $x > 1$) şi că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 0$ etc. Limita este egală cu 1.

21. $f(x) = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$, cînd $x \to a$.

R. Nedeterminarea de forma 1^{∞}; se poate logaritma și apoi se aplică regula lui *l'Hospital*, limita fiind egală cu $\frac{2}{e^{\sin 2a}}$.

22. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+1} - \operatorname{tg}\sqrt{x+1}}{\operatorname{tg}(x^2-1)},$$ cînd $x \to 1$, fără a folosi regula lui *l'Hospital*.

R. Avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$; se poate observa însă că putem scrie;

$$f(x) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}\right)}{\left(\cos\sqrt{x^2+1}\right)\left(\cos\sqrt{x+1}\right)} \cdot \frac{x^2-1}{\operatorname{tg}(x^2-1)} \cdot \frac{1}{x^2-1}$$ și ținînd seama de faptul că $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ și $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$, fără dificultate se găsește că limita respectivă este

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\cos^2\sqrt{2}}.$$

23. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}$$ cu $m, n \in Z_+$, pentru $x \to 1$.

R. Se aduce la același numitor, se face simplificarea cu $1 - x$ și, trecînd la limită, avem:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{m(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) - n(1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1})}{(1-x)(1 + x + \ldots + x^{m-1})(1 + x + \ldots + x^{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{mn} \lim_{x\to 1} \frac{m(1 + x + \ldots + x^{n-1} - n) - n(1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1} - m)}{1-x}$$

și scoțînd din nou în factor la numărător pe $(1 - x)$, iar apoi efectuînd calculele se obține limita $\frac{m-n}{2}$.

24. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2},$$ pentru $x \to 0$

și $$g(a) = \frac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\ldots(a^{n-1+p}-1)}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^p-1)},$$ pentru $a \to 1$, unde $m, n, p \in Z$.

R. Pentru $f(x)$: se dezvoltă binoamele de la numărător și apoi se simplifică cu x^2, limita este $\frac{mn(n-m)}{2}$; pentru $g(a)$: se face mai întîi simplificarea cu $(a-1)^p$, limita este C_n^p.

25. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x},$$ pentru $x \to 0$.

R. Nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$; se observă însă că putem scrie:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - 1}{x} - \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^n - 1}{x}, \quad (1)$$

şi dezvoltînd ambii numărători după formula binomului, iar apoi trecînd la limită, se obţine $2n$.

26. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}, \text{ pentru } x \to e.$$

R. Nedeterminare de forma 1^∞. Se observă însă că putem scrie:

$$f(x) = \left\{[1 + (\ln x - 1)]^{\frac{1}{\ln x - 1}}\right\}^{\frac{\ln x - 1}{(x-e)(x-2e)}},$$

apoi se trece la limită ţinînd seama că

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{(x-e)(x-2e)} = -\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim_{x\to e} \ln\left[1+\frac{x-e}{e}\right]^{\frac{1}{x-e}} = -\frac{1}{e^2}$$

şi prin urmare limita lui $f(x)$ este $e^{-\frac{1}{e^2}}$.

27. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x},\quad g(x) = \frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x} \text{ şi } h(x) = xe^{\frac{1}{\sin x}}$$

pentru $x \to 0$.

R. Limita lui $f(x)$ este 2. Pentru $g(x)$ se poate scrie $g(x) = \frac{e^{x^3}-1}{x^3}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3$ şi limita este 1.

Pentru $h(x)$ se distinge două cazuri: $x \to 0_+$ si $x \to 0_+$, în primul caz limita prezintă o nedeterminare de forma $0\cdot\infty$, aceasta putîndu-se înlătura, observînd că $h(x) = \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{\sin x}}}{\frac{1}{\sin x}}$, limita în acest caz fiind $+\infty$; în al doilea caz limita este zero, ţinînd seama că $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.

28. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{(\ln x)^4}{x^2},\quad g(x) = \frac{3x - 2\ln x}{x + \ln x},\quad h(x) = \frac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x}}$$

cînd $x \to \infty$.

R. Se ține seama că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$ observîndu-se că putem scrie:

$$f(x) = \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^4, \quad g(x) = \frac{3 - 2\frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\ln x}{x}}, \quad h(x) = 3\,\frac{\ln\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\ln\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}},$$

limitele respective fiind: 0, 3, 0.

29. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = x^4 \ln x, \quad g(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{4x^2}, \quad h(x) = \frac{\ln(1 + 3x)}{\sqrt{x}}, \quad j(x) = \frac{\ln(1 + 3x - x^2)}{x}$$

pentru $x \to 0$.

R. Se va ține seama că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ și că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{\alpha x} = 1$, observîndu-se că putem scrie:

$$f(x) = x^3(x \ln x), \quad g(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{1}{2x}, \quad h(x) = \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} \cdot 3\sqrt{x},$$

$$j(x) = \frac{\ln(1 + 3x - x^2)}{3x - x^2} \cdot (3 - x)$$ (cu $x \neq 3$); limitele respective sînt deci: 0, ∞, 0, 3.

30. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(1 + 2x)} \quad \text{și} \quad g(x) = \frac{x^2(\ln x)^3}{\ln(1 + k^2x)} \quad \text{cînd } x \to 0.$$

R. Se observă că putem scrie:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{2x}{\ln(1 + 2x)} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad g(x) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k^2x}{\ln(1 + k^2x)} \cdot 3(\sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})$$

și ținînd seama de exercițiile anterioare, limitele sînt $\frac{1}{2}$ și respectiv 0.

31. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = (\ln \cos x)\ln x, \text{ cînd } x \to 0_+.$$

R. Limita prezintă o nedeterminare de forma $0\cdot\infty$; dar, se observă că putem scrie:

$$f(x) = \left[\ln\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]\ln x = -\sin\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot x\ln x \cdot \frac{\ln\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}$$

și ținînd seama de exercițiile anterioare și de faptul că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$, limita lui $f(x)$ este 0.

32. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\operatorname{ctg} x}, \quad g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad h(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Cazuri de nedeterminare de forma 1^∞ şi ∞^0: limitele sînt respectiv e^{-1}, 1, 1.

33. Să se calculeze limita funcţiei $f(x) = \left(\cos \frac{a}{x}\right)^{x^n}$, dacă $a \in R$ şi $n \in N$, cînd $x \to \infty$.

R. Nedeterminare de forma 1^∞; se ţine seama că putem scrie

$$f(x) = \left\{\left[1 + \left(\cos\frac{a}{x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{a}{x} - 1}}\right\}^{x^n\left(\cos\frac{a}{x} - 1\right)}$$

limita fiind egală cu 1, dacă $n < 2$; $e^{-\frac{a^2}{2}}$ dacă $n = 2$ şi 0, dacă $n > 2$.

34. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = [1 + \ln(x + 1) + \ldots + \ln(1 + nx)]^{\frac{1}{x}} \text{ cînd } x \to 0.$$

R. Limita prezintă o nedeterminare de forma 1^∞; se poate nota $\varphi(x) = \ln(1 + x) + \ldots + \ln(1 + nx)$ şi avem $f(x) = [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{x}}$ pentru orice $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Se ţine apoi seama că $\lim\limits_{x\to 0} (1 + nx)^{\frac{1}{nx}} = e$; limita este $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

35. Să se calculeze $\lim \frac{(x^{p_1} - 1)(x^{p_2} - 1)\ldots(x^{p_n} - 1)}{(x - 1)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}}$ cînd $x \searrow 1$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_n \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

R. Se va ţine seama că

$$\lim_{x\searrow 1} \frac{x^p - 1}{(x - 1)^p} = \lim_{x\searrow 1}\left(\frac{x}{x - 1}\right)^{p-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } p > 1 \\ 0, & \text{dacă } p \in (0, 1) \end{cases}$$

cu concluzii corespunzătoare pentru limita din enunţ.

36. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{\ln(2x - 1)}{x^2 + x - 2},\quad g(x) = \frac{\ln(2x - 1)^3}{x^2 + x - 2},\quad h(x) = (x - 1)\ln\sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

cînd $x \to 1$.

R. Pentru $f(x)$: notăm $2x - 1 = 1 + h$ şi observînd că $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, putem scrie:

$$f(x) = \frac{\ln(1 + h)}{\frac{h}{2}\left(3 + \frac{h}{2}\right)} = \frac{4}{6 + h} \cdot \frac{\ln(1 + h)}{h}$$

şi cum $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1$, limita lui $f(x) = \frac{2}{3}$. Pentru $g(x)$ se ţine seama că $g(x) = 3f(x)$, limita fiind deci 2. În fine, pentru $x > 1$ se va observa că putem scrie: $h(x) =$

$- (x-1)\ln\sqrt{x-1} + (x-1)\ln\sqrt{x+3} = \frac{1}{2}[(x-1)\ln(x-1) + (x-1)\ln(x+3)]$ şi cînd $x \to 1$ (prin valori mai mari decît 1) limita lui $h(x)$ este 0, ţinînd seamă că $\lim_{x \searrow 1} (x-1)\ln(x-1) = 0$.

37. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Ţinînd seama că $\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$, putem scrie

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}} - \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}}$$

şi împărţind numărătorii şi numitorii din ambele fracţii cu x, se deduce că limita lui $f(x)$ este 2.

38. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{x}, \text{ pentru } x \to 0 \ (a > 0);$$

$$g(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \text{ pentru } x \to 0 \ (a, b > 0);$$

$$h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}, \text{ pentru } x \to 0 \quad a_i > 0 \text{ cu } i = 1, 2, \ldots, n.$$

R. Pentru $f(x)$: se notează $a^x = 1 + \alpha$ cu $\alpha \to 0$ şi deci $x = \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}$; astfel fiind,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \ln a}{\ln(1+\alpha)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln a}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \ln a.$$

Apoi, $\lim_{x \to 0} g(x) = e^{\frac{1}{2}\lim_{x \to 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} = e^{\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x}\right)} = \sqrt{ab}.$

Pentru $h(x)$ se observă că putem scrie

$$\lim_{x \to 0} h(x) = e^{\frac{1}{n}\lim_{x \to 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x - n}{x}}$$

şi ţinînd seama de limita lui $g(x)$, rezultă că

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \sqrt[n]{a_1, a_2 \ldots a_n}.$$

39. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \left[\frac{p_1^{x+1} + p_2^{x+1} + \ldots + p_n^{x+1}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right]^{\frac{1}{x}}, \text{ pentru } x \to 0, \text{ cu } p_i > 0.$$

R. Caz de nedeterminare de forma 1^∞ ; se observă însă că putem scrie:

$$f(x) = e^{\varphi(x)}, \text{ unde } \varphi(x) = \left(\frac{p_1^{x+1} + p_2^{x+1} + \ldots + p_n^{x+1}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} - 1\right)\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{p_1(p_1^x - 1) + p_2(p_2^x - 1) + \ldots + p_n(p_n^x - 1)}{(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)x} \text{ şi cînd } x \to 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{\sum\limits_1^n p_i}(\ln p_1^{p_1} + \ln p_2^{p_2} + \ldots + \ln p_n^{p_n})$$

deoarece se ştie că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (p_1^{p_1}, p_2^{p_2}\ldots p_n^{p_n})^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}}$, $i = 1, 2,\ldots, n$.

40. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Caz excepţie $\dfrac{0}{0}$; se observă însă că putem scrie:

$$f(x) = \frac{e^{bx}(e^{x(a-b)} - 1)}{x},$$

limita respectivă este $a - b$.

La acelaşi rezultat ajungem dacă folosim regula lui *l'Hôspital*.

41. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \left(\frac{x^m}{x^m - 1}\right)^{\operatorname{ctg}\left(\frac{a}{x}\right)^m}, \text{ pentru } x \to \infty, \text{ cu } m \in N \text{ şi } a > 0.$$

R. Limita prezintă o nedeterminare de forma 1^∞ ; se observă însă că putem scrie

$$f(x) = \left[\left(1 + \frac{1}{x^m - 1}\right)^{x^m - 1}\right]^{\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{a}{x}\right)^m}{x^m - 1}},$$

limita fiind egală cu $e^{\frac{1}{a^m}}$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{a}{x}\right)^m}{x^m - 1} = \dfrac{1}{a^m}$.

Se poate logaritma şi apoi se aplică regula lui *l'Hôspital*.

42. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = (x - a)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{a} \text{ şi } g(x) = (x - a)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} \text{ pentru } x \to a.$$

R. Se poate folosi regula lui *l'Hôspital*, observînd că:

$$f(x) = \frac{(x-a)\cdot\cos\frac{\pi x}{a}}{\sin\frac{\pi x}{a}},$$ cu limita $\frac{a}{\pi}$ şi asemănător pentru $g(x)$, cărei limită este $-\frac{2a}{\pi}$.

Altfel. Se observă că se poate scrie astfel

$$f(x) = \frac{x-a}{-\text{tg}\left(\pi - \frac{\pi x}{a}\right)} = \frac{x-a}{\text{tg}\,\frac{\pi}{a}(x-a)}$$ şi apoi se ţine seama că $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. Asemănător pentru $g(x)$, unde se înlocuieşte $\text{tg}\,\frac{\pi x}{2a}$ cu $\frac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi}{2a}(a-x)}$.

43. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f(x) = \frac{1-\sin x}{(\pi - 2x)^2}, \text{ pentru } x \to \frac{\pi}{2};$$

$$g(x) = \frac{\text{tg}\,5x}{\text{tg}\,3x}, \text{ pentru } x \to \frac{\pi}{2}.$$

R. Se observă că $f(x) = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{16\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)^2}$ limita fiind egală cu $\frac{1}{8}$. Pentru cea de a doua funcţie, putem scrie: $g(x) = \frac{\sin 5x}{\sin 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{\cos 5x}$, limita fiind egală cu $\frac{3}{5}$. Se poate aplica şi regula lui *l'Hôspital*.

44. Aplicînd regula lui *l'Hôspital*, să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{x^2 - x\ln x}{\ln(1-x)}, \text{ pentru } x \to 0_+;$$

$$g(x) = \frac{a^n - x^n}{\ln a^n - \ln x^n}, \text{ pentru } xl \to a;$$

$$h(x) = \frac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{c^x \sin cx - d^x \sin dx}, \text{ pentru } x \to 0,$$

$(a, b, c, d \in R_+)$.

R. $-\infty$, a^n, $\frac{a-b}{c-d}$.

45. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \frac{x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n} - n}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x - a_1 - a_2 - \ldots - a_n}$$

cînd $x \to 1$, unde $a_k > 0$ și $a_k \neq 1$, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$.

R. Se aplică regula lui *l'Hôspital*; limita este

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i}.$$

46. Să se calculeze limitele funcțiilor:

$$f(x) = \frac{\ln(\cos \pi x + 2) + c(x-1)^2}{\ln(2 - 2x^n + x^{2n})}, \text{ pentru } x \to 1,$$

$$g(x) = \frac{\sin 3x + 4 \sin^3 x - 3 \ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin x}, \text{ pentru } x \to 0,$$

$$h(x) = \frac{\ln(e^{ax} \cos bx - e^{bx} \cos ax)}{\ln(e^{ax} \sin bx - e^b \sin ax)}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Se aplică regula lui *l'Hôspital*: limitele sînt:

$$\frac{\pi^2 + 2a}{2n^2}, \quad \frac{3}{2}, \quad 1.$$

47. Să se calculeze limitele funcțiilor

$$f(x) = \frac{e^x(1 - \cos x) + e^x(1 - \cos 2x)}{(e^x - \cos x)^2},$$

$$g(x) = \frac{\ln(1 + \sin \sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}},$$

$$h(x) = \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx},$$

pentru $x \to 0$.

R. Se aplică regula lui *l'Hôspital*, limitele respective fiind $\frac{5}{2}$, 1, $\frac{2a}{b}$.

48. Să se calculeze limitele funcțiilor:

$$f(x) = \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}, \text{ pentru } x \to 0,$$

$$f_2(x) = \frac{e^x \sin x - x}{\sin(\sin x)}, \text{ pentru } x \to 0,$$

$$f_3(x) = (e^{\sin a} - e^{\sin ax})\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}, \text{ pentru } x \to 1,$$

$$f_4(x) = \frac{1 - \sin^\alpha x}{\sqrt{x}\cos^2 x}, \text{ pentru } x \to \frac{\pi}{2},$$

$$f_5(x) = \frac{(1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x} - x}{x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Se aplică regula lui *l'Hôspital*, limitele respective fiind: 1, 0, $\frac{2a}{\pi}$ $(\cos a)e^{\sin a}$, $\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $-\frac{1}{2}e$.

49. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = x^{\frac{1}{1-x}} \text{ şi } g(x) = x^{\ln(x-1)}, \text{ pentru } \underset{x>1}{x \to 1}.$$

R. Se aplică regula lui *l'Hôspital*, limitele respective fiind $\frac{1}{e}$ şi 1.

50. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x + \ldots + \operatorname{arctg} nx}{\ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) + \ldots + \ln(1 + px)}, \text{ cînd } x \to 0.$$

R. Nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$; se aplică regula lui *l'Hôspital* şi limita este $\frac{n(n+1)}{p(p+1)}$.

51. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[e^{\arcsin x} - (\operatorname{tg} x + 1)\right] \text{ pentru } x \to 0;$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x \ln x}, \text{ pentru } x \to 1;$$

$$h(x) = \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Se aplică regula lui *l'Hôspital* de două ori; limitele sînt respectiv: $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$.

52. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{2x + \sin 2x - \pi \sin x}{4(1 + \cos 2x)}, \text{ pentru } x \to \frac{\pi}{2},$$

$$g(x) = \frac{x^e - e^x}{(x - e)^2}, \text{ pentru } x \to e,$$

$$h(x) = \frac{\ln \operatorname{tg} x^m}{\ln \operatorname{tg} x^p}, \text{ pentru } x \to 0_+.$$

R. Se aplică de două ori regula lui *l'Hôspital*, limitele fiind: $\frac{\pi}{16}$, $-\frac{1}{2}e^{e-1}$, $\frac{m}{p}$.

53. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = [\ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) + \ldots + \ln(1 + px)]^x,$$

cînd $x \to 0$.

R. Nedeterminare de forma 0^0; se notează $g(x) = \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x) + \ldots + \ln(1 + px)$ observîndu-se că putem scrie:

$$\lim_{x \to 0} \ln [g(x)]^x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln[g(x)]}{\frac{1}{x}}, \qquad (1)$$

şi în (1) se aplică regula lui *l'Hôspital* (de două ori), limita fiind egală cu 1.

54. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$g(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3 \operatorname{cosec} x} - \frac{1}{x^3 \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x \operatorname{ctg} x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Pentru $f(x)$ putem pune $\frac{1}{x} = z$ şi apoi se aplică de două ori regula lui *l'Hôspital*, limita fiind egală cu $\frac{1}{2}$. Pentru $g(x)$ se observă că putem scrie:

$$g(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}\right) + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x^3}\right) + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{ctg} x}\right)$$

şi apoi se aplică regula lui *l'Hôspital* fiecăreia din funcţiile din cele trei paranteze. Limita este $\frac{5}{6}$.

55. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arc\,tg} x}{\sin x - x \cos x}, \text{ pentru } x \to 0;$$

$$g(x) = \frac{(e^x - e^2)^3}{(x - 4)e^x + e^2 x}, \text{ pentru } x \to 2;$$

$$h(x) = \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Se aplică de trei ori regula lui *l'Hôspital*, limitele respective fiind: 2, $6e^4$, 1.

56. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{\ln^n x}{x^n}, \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$g(x) = x^m (\ln x)^n, \text{ pentru } x \to 0_+ \ (m, n > 0);$$
$$h(x) = (\ln x)^m [\ln (1 + x)]^n, \text{ pentru } x \to 0_+ \ (m, n > 0).$$

R. Se aplică de n ori regula lui *l'Hôspital*, limitele sînt toate egale cu zero.

57. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \left(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)}, \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$g(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^{\ln x}, \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$h(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Se logaritmează mai întîi și apoi se aplică regula lui *l'Hôspital*, limitele respective sînt : e; 1; $e^{\frac{1}{6}}$.

58. Să se calculeze limita funcției $f(x) = \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$, pentru $x \to \infty$.

R. Limita este egală cu e.

59. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = \left(\cos\frac{a}{x} + b\sin\frac{a}{x}\right)^x, \text{ pentru } x \to \infty.$$

R. Caz excepție de forma 1^∞, limita este egală cu e^{ab}.

60. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = (1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)^{\frac{1}{x}}, \text{ cînd } x \to 0.$$

R. Nedeterminare de forma 1^∞; se logaritmează și apoi se aplică regula lui *l'Hôspital*, limita fiind $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

61. Să se calculeze limita funcției

$$f(x) = \left[\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{\sin x}}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Nedeterminare de forma 1^∞; se logaritmează și apoi se aplică regula lui *l'Hôspital*, limita fiind $\sqrt[n]{a\, ,\, a \ldots a_n}$.

62. Să se calculeze limitele funcțiilor:

$$f_1(x) = \left[\frac{\cos\frac{\alpha x + 1}{x}}{\cos\alpha}\right]^x, \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$f_2(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{\sin x}}, \text{ pentru } x \to 0;$$

$$f_3(x) = (\cos x + \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}, \text{ pentru } x \to 0;$$

$$f_4(x) = \left(\sin\frac{\pi x}{2x + 1}\right)^{x^2}, \text{ pentru } x \to \infty.$$

R. Se logaritmează și apoi se aplică regula lui *l'Hôspital*; limitele respective fiind:

$$e^{-\operatorname{tg}\alpha},\ e^2,\ e^{\frac{1}{2}},\ e^{\left(\frac{\pi}{8}\right)^2},$$

63. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^n x - 1}{2\sin^2 x - 1}, \text{ pentru } x \to \frac{\pi}{4}, n \in N^*;$$

$$g(x) = (\operatorname{tg} x - 1)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right), \text{ pentru } x \to \frac{\pi}{4};$$

$$h(x) = \frac{x}{\arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Cazuri de nedeterminare de forma: $\frac{0}{0}$; $\infty \cdot 0$; $\frac{0}{0}$. Se poate scrie

$$f(x) = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^{n-1} x + \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + 1)}{2\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

şi efectuînd unele simplificări, iar apoi trecînd la limită, aceasta este egală cu n. Pentru cea de a doua funcţie, avem:

$$g(x) = \left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

limita fiind egală cu 1. În fine, pentru $h(x)$ se observă că se poate scrie:

$$h(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \cdot \sqrt{a^2 + x^2},$$

limita fiind egală cu $|a|$.

La aceleaşi rezultate se ajunge folosind regula lui *l'Hôspital*.

64. Să se calculeze limitele funcţiilor:

$$f(x) = \left[1 - \frac{a}{\ln x}\right]^{(\ln x)^2}, \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}, \text{ pentru } x \to 0;$$

$$h(x) = \frac{\ln x - e^x}{e^x a^e - \ln x}, \text{ pentru } x \to \infty.$$

R. Se observă că putem scrie:

$$f(x) = \left[\left(1 - \frac{a}{\ln x}\right)^{\ln x}\right]^{\ln x}, \text{ limita fiind } 0.$$

Pentru cea de a doua funcţie, avem:

$$g(x) = \left[(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{x}{\ln(1-x)}}, \text{ limită fiind egală cu } e^{-1},$$

Pentru ultima funcţie, putem scrie:

$$h(x) = \left[\frac{\frac{\ln x}{e^x} - 1}{e^{\epsilon} - \frac{\ln x}{e^x}}\right], \text{ limita fiind egală cu } -\frac{1}{a^{\epsilon}}\left(\text{ţinînd seama că } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x} = 0\right).$$

La aceleaşi rezultate se ajunge dacă se foloseşte regula lui *l'Hôspital*.

65. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{x \sin \frac{1}{x}}{\ln(1 + x)}$; se cere să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nu există şi să se justifice de ce nu se poate aplica regula lui *l'Hôspital* în acest caz.

R. Se ţine seama că $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ şi că $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nu există. În consecinţă, nu există nici $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Dacă notăm $g(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $x \in R\setminus\{0\}$ şi $h(x) = \ln(1 + x)$, cu $x > -1$, avem $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x)$, funcţiile $g(x)$ şi $h(x)$ sînt derivabile şi $h'(x) \neq 0$ pentru orice $x > -1$. Dar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1 + x)\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)$, această limită însă nu există, deoarece nu există $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Astfel fiind, nu sînt îndeplinite toate condiţiile de aplicabilitate ale regulii lui *l'Hôspital* şi deci aceasta nu se poate folosi.

66. Se consideră funcţia $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in R\setminus\{0\} \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ şi se cere să se studieze continuitatea funcţiei în punctul $x = 0$.

Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos\frac{1}{x}}{\ln(1 + x)}$ nu există şi să se precizeze de ce nu este aplicabilă regula lui *l'Hôspital* în acest caz.

67. Să se calculeze limitele funcţiilor

$$f_1(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right), \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$f_2(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}}, \text{ pentru } x \to 1;$$

$$f_3(x) = \frac{x + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x + \sqrt{x^2 + 1}}, \text{ pentru } x \to \infty;$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2x(e^{-x} + 1)}, \text{ pentru } x \to 0;$$

$$f_5(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{nx + \sqrt{1 - n^2x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}}, \text{ pentru } x \to 0.$$

R. Limitele respective sînt: 0, 1, $1, \frac{\pi}{8}$, $(n-1)$.

68. Să se calculeze limita funcţiei

$$f(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pentru } x \nearrow 1, \text{ unde } n \in N.$$

R. Se poate nota $\arccos x = a \Rightarrow x = \cos a$ şi funcţia dată devine

$$f(\cos a) = = \frac{\sin na}{|\sin a|}. \qquad (1)$$

Se observă că dacă $x \nearrow 1$, atunci $a \to 0$, iar limita din (1) este $\pm n$, după cum a tinde către zero prin valori mai mari şi respectiv mai mici de 0.

Se poate folosi şi regula lui *l'Hôspital*, ajungîndu-se la aceleaşi rezultate.

69. Să se găsească limitele laterale ale funcţiilor:

$$f(x) = \frac{1+|\cos x|}{\sin |x|}, \text{ în punctul } x = \pi;$$

$$g(x) = \frac{x-2}{x+2} e^x, \text{ în punctul } x = -2.$$

R. Pentru ambele funcţii $l_s = +\infty$, $l = -\infty$.

70. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiei

$$f(x) = (x+3)^{\frac{x+2}{x+3}}, \text{ în punctul } x = -3.$$

R. Limita la dreapta este $-\infty$. Cînd $x \to -3$ prin valori mai mici de -3, limita prezintă o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$ dar se observă că putem scrie

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x+2}{x+3}}}{\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}(x+2), \text{ limita fiind deci } -\infty.$$

$\left(\text{Se are în vedere că } \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.\right)$

71. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiei

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}},$$

în punctul $x = 0$.

R. $l_s = -1$, $l_d = 1$.

72. Să se calculeze limita funcţiei $f(x) = \left(\ln \frac{2x}{\pi}\right) e^{\frac{1}{\cos x}}$, cînd $x \to \frac{\pi}{2}$;

R. Se calculează limitele laterale. Dacă $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)_+$ limita este 0. Dacă $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)_-$ atunci limita se prezintă sub forma nedeterminată $0 \times \infty$; această nedeterminare se înlătură punînd $\frac{\pi}{2} - x = t$, obţinîndu-se:

$$f(t) = \ln\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) e^{\frac{1}{\sin t}} = -\frac{\ln\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)}{-\frac{2t}{\pi}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^{\frac{1}{\sin t}}}{\frac{1}{\sin t}} \cdot \frac{t}{\sin t}.$$

Această limită este $-\infty$.

73. Să se arate că funcţia

$$f(x) = \begin{cases} (x^2)^x, & \text{pentru } x \in R\setminus\{0\}, \\ 1 & , \text{ pentru } x = 0, \end{cases}$$

este continuă în $x = 0$.

R. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to 0}(x \ln x^2)} = 1$ şi $f(0) = 1$.

Să se studieze continuitatea funcţiilor următoare în punctele menţionate în dreptul fiecăreia:

74. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} \text{dacă } x \in R\setminus\{0\}, \\ -1, \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$

în punctul $x = 0$.

R. Funcţia dată este continuă pe R.

75. $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & , \text{ dacă } x \in R\setminus\{0\}, \\ \text{arbitrar}, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$

în punctul $x = 0$.

R. Funcţia nu este continuă în $x = 0$.

76. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in R\setminus\{0\}, \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$

în punctul $x = 0$.

R. Funcţia este continuă pe R.

77. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin^2 x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x \in [0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \\ 1 & , \text{ dacă } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

în punctul $x = \frac{\pi}{2}$.

R. Funcţia nu este continuă în $x = \frac{\pi}{2}$.

Capitolul VI

Derivate, reprezentarea grafică a funcțiilor

A. Derivate

Folosind definiția derivatei, să se calculeze derivatele funcțiilor în punctele specificate

1. $f(x) = x^3 - 5x + 5,$	$f'(4).$	**R.** 43.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2},$	$f'(-3).$	**R.** $-2.$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2},$	$f'(-1).$	**R.** $-\dfrac{2}{3}.$
4. $f(x) = \sqrt[4]{x + 1},$	$f'(2).$	**R.** $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{27}}.$
5. $f(x) = \ln(x^2 + 1),$	$f'(-2).$	**R.** $-\dfrac{4}{5}.$
6. $f(x) = \log_a(x + 3),$	$f'(1).$	**R.** $\dfrac{1}{4 \ln a}.$
7. $f(x) = 2^{x+1},$	$f'(-3).$	**R.** $\dfrac{1}{4} \ln 2.$
8. $f(x) = a^{x^2+x+1},$	$f'(-1).$	**R.** $-a \ln a.$
9. $f(x) = \sin(2x + \pi),$	$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	**R.** 2.
10. $f(x) = \cos(x^2 - \pi),$	$f'(0).$	**R.** 0.
11. $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right),$	$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	**R.** $\dfrac{4}{3}.$
12. $f(x) = \operatorname{ctg}(x^2 - \pi),$	$f'\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$	**R.** $-2\sqrt{\pi}.$
13. $f(x) = e^x,$	$f'(0).$	**R.** 1.
14. $f(x) = a^x,$	$f'(1).$	**R.** $a \ln a.$

15. $f(x) = x^a$, $\quad f'(a)$. $\quad$ R. a^a.

16. $f(x) = x^x$, $\quad f'(a)$, $a > 0$, $a \neq 1$. $\quad$ R. $a^a(\ln a + 1)$.

17. $f(x) = x^2 \ln x$, $\quad f'(1)$. $\quad$ R. 1.

18. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 6 & x \in (-\infty, 1], \\ \ln x & x \in (1, \infty), \end{cases}$ $\quad f'(0)$, $f'(e)$. $\quad$ R. -5 şi $\frac{1}{e}$.

19. $f(x) = \arcsin x$, $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)$. $\quad$ R. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Să se scrie ecuaţiile tangentelor la graficele funcţiilor de mai jos în punctele care au abscisele specificate în dreptul fiecăreia:

20. $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $\quad x = 4$. $\quad$ R. $3x - y - 12 = 0$.

21. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ $\quad x = -1$. $\quad$ R. $x + y + 1 = 0$.

22. $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $\quad x = 3$. $\quad$ R. $x - 4y + 5 = 0$.

23. $f(x) = 3^{x-1}$, $\quad x = 2$. $\quad$ R. $x \ln 27 - y + 3 - 6 \ln 3 = 0$.

24. $f(x) = \log_a(x^2 - 3)$, $\quad x = -2$, $a > 0$, $a \neq 1$. $\quad$ R. $4x + y \ln a + 8 = 0$.

25. $f(x) = \ln(x + 3)$, $\quad x = -2$. $\quad$ R. $x - y + 2 = 0$.

26. $f(x) = \cos 2x$, $\quad x = \frac{\pi}{3}$. $\quad$ R. $y + \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

27. $f(x) = \sin 3x$, $\quad x = -\frac{\pi}{3}$. $\quad$ R. $-3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = y$.

28. $f(x) = \operatorname{tg} 4x$, $\quad x = \frac{\pi}{16}$. $\quad$ R. $y - 1 = 8x - \frac{\pi}{2}$.

29. $f(x) = \operatorname{ctg}(3x - \pi)$, $\quad x = \frac{\pi}{4}$. $\quad$ R. $y + 1 = -6\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

30. $f(x) = \arcsin 2x$, $\quad x = \frac{1}{4}$. $\quad$ R. $y - \frac{\pi}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

31. $f(x) = \arccos(3x - 1)$, $\quad x = \frac{1}{2}$. $\quad$ R. $y - \frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

32. $f(x) = \operatorname{arctg}(2x + 1)$, $\quad x = 0$. $\quad$ R. $y = x + \frac{\pi}{4}$.

33. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + \sqrt{3})$, $\quad x = 0$. $\quad$ R. $y = \frac{\pi}{3}$.

34. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\quad x = 2$. $\quad$ R. $x - 2\sqrt{2}\, y + 2 = 0$.

35. $f(x) = x + \ln x$, $\quad x = e$. $\quad$ R. $y = \frac{e + 1}{e}\, x$.

36. $f(x) = 2x \cos x + (x^2 - 2)\sin x,\ x = 0.$ R. $y = 0.$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x + \sqrt{1 - x^2}},\quad x = 0.$ R. $y = x.$

38. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}}\quad x = +1.$ R. $y = \sqrt{3}.$

39. $f(x) = \lg(x^3 - 2x^2 + 1),\quad x = 0.$ R. $y = 0.$

Să se scrie ecuațiile tangentelor la graficele funcțiilor de mai jos, paralele cu dreptele precizate în dreptul fiecăreia.

40. $f(x) = x^2 - 5x + 1,\quad 3x - y + 11 = 0.$ R. $3x - y - 15 = 0.$

41. $f(x) = 3x - 7,\quad -3x + y - 12 = 0.$ R. coincide cu graficul.

42. $f(x) = -2x + 13,\quad 3x - 7y + 14 = 0.$ R. imposibil.

43. $f(x) = x^3 - 3x + 2,\quad 9x - y + 10 = 0.$ R. $\begin{cases} 9x - y - 14 = 0 \\ 9x - y + 18 = 0. \end{cases}$

44. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 4,\quad 5x - y - 2 = 0.$ R. $\begin{cases} 5x - y - 4 = 0 \\ 80x - 16y - 91 = 0. \end{cases}$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1},\quad x + 9y - 17 = 0.$ R. $\begin{cases} x + 9y - 14 = 0 \\ x + 9y - 2 = 0. \end{cases}$

46. $f(x) = \sqrt{\sin x},\quad y = 0.$ R. $y = 1.$

Să se calculeze unghiurile sub care se taie graficele funcțiilor de mai jos:

47. $f(x) = 2x + 3$ și $g(x) = x^2 - x - 1.$ R. $\varphi_1 = 45°,\ \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3}\right).$

48. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ și $g(x) = x^2 - 3x.$ R. $\varphi = 90°.$

49. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ și $g(x) = x^2 - 2x + 1.$ R. $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(4),\ \varphi_2 = 0.$

Să se calculeze derivatele funcțiilor următoare:

50. $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^3 - 1}.$ R. $\dfrac{7x^4 + 3x^2 - 4x}{2\sqrt{x^3 - 1}}.$

51. $f(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{\sqrt{x}}.$ R. $\dfrac{(x - 1)^2(5x + 1)}{2x\sqrt{x}}.$

52. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}.$ R. $\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{[(1 - x^4)(1 + x^2)]^2}}.$

53. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}.$ R. $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{[(1 - x^3)^4(1 + x^3)^2]^2}}.$

54. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^3}}$.　　R. $-\dfrac{2}{x^3} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+13}{\sqrt{x^2+1}}$.

55. $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.　　R. $\cos^3 x$.

56. $f(x) = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x$.　　R. $x^2 \cos x$.

57. $f(x) = \sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$.　　R. $\dfrac{a-b}{2} \cdot \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}}$.

58. $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x^3+4}}$.　　R. $\dfrac{2x}{3(x^2+1)} - \dfrac{3x^2}{2(x^3+4)}$.

59. $f(x) = \ln(\ln x)$.　　R. $\dfrac{1}{x\ln x}$.

60. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\ln x)$.　　R. $\dfrac{1}{x + x(\ln x)^2}$;

61. $f(x) = \log_a \sqrt{\dfrac{1-\cos px}{1+\cos px}}$.　　R. $\dfrac{p}{\sin px \ln a}$;

62. $f(x) = \ln[\ln(a + bx^n)]$.　　R. $\dfrac{nbx^{n-1}}{(a+bx^n)\ln(a+bx^n)}$;

63. $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$.　　R. $\dfrac{1 - \ln x \ln(\ln x)}{x^2 \ln x}$;

64. $h(x) = \dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.　　R. $\sin(\ln x)$.

65. $f(x) = \dfrac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}$.　　R. $e^{ax}\cos bx$.

66. $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x}$.　　R. $\dfrac{2e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

67. $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.　　R. $\arcsin x$.

68. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{x^2+1}$.　　R. $\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$;

69. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{e^x \cos x}{1 + e^x \sin x}$.　　R. $\dfrac{e^x(\cos x - \sin x - e^x)}{1 + 2e^x \sin x + e^{2x}}$;

70. $f(x) = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1} +$
$+ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.　　R. $\dfrac{1}{x^3+1}$.

71. $f(x) = x(\arcsin x)^2 +$
$+ 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x$.　　R. $(\arcsin x)^2$.

72. $f(x) = \dfrac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1} + \dfrac{3}{4}\arccos\sqrt{\dfrac{1}{x}}$;　　R. $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x-1}}$.

73. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1} - x} -$
$- \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2x}{\sqrt[3]{x^3+1}} + 1\right)\right].$ R. $\frac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$;

Să se arate că funcțiile și derivatele lor verifică egalitățile scrise în dreptul fiecăreia.

74. $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$, $f''(x) + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$.

75. $f(x) = \frac{1}{a^2 + b^2}$ $[ax + b \ln(a \cos x + b \sin x)]$ și
$g(x) = \frac{1}{\sqrt{b - a}} \arccos \left(\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cdot \cos x\right)$, verifică relația $[1 - af'(x)]^2$
$[1 - bg'(x)]^2 = a[bf'(x) \cdot g'(x)]^2$. $b > a$.

76. $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x)$, $g(x) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3}$, verifică relația
$\{g'(x)[1 - 5f'(x)]\}^2 + \{f'(x)[1 - 5g'(x)]\}^2 = [4f'(x) \cdot g'(x)]^2$.

77. $f(x) = \frac{1}{3} \arccos \frac{4 + 5 \cos x}{5 + 4 \cos x}$, $g(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$, verifică relația
$3f'(x) - 2g'(x) = 0$.

78. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos 2x}}$ $f(x) + f''(x) = 3f^5(x)$.

79. Fiind date funcțiile:

$$y = e^{-2x}(\cos x + \sin x),\ z = a \cdot e^x \sin(2x + b)$$

se cere să se arate că $y'' + 4y' + 5y = 0$,

$$z'' - 2z' + 5z = 0.$$

R. Se ține seama că $y' = -2y + e^{-2x} (\cos x - \sin x)$,
$y'' = -4y' - 5y$.
$z' = z + 2ae^x \cos(2x + b)$ și
$z'' = 2z' - 5z$.

80. Funcțiile:

$$y = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2},$$

$$z = \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{1}{9} (2 + x^2) \sqrt{1 - x^2}$$

și derivatele lor verifică relațiile:

$$xy' - z' = 0,\ (2z'y'' - y'z'')^2(y'^2 - z'^2) = (z')^4.$$

R. $y' = x \arcsin x$, $z' = x^2 \arcsin x$.

81. Să se arate că funcția

$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + x} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$ (1), cu $x \in (-1, 1)$ este constantă.

R. $f'(x) = 0$.

Altfel. Dacă se ia tangenta în ambii membri din (1) se obține $\operatorname{tg} f = \infty$, rezultînd din aceasta că $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

82. Să se calculeze derivata funcției

$$y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \text{ cu } x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ și } k \in Z$$

și să se explice rezultatul.

R. Domeniul de definiție

$$x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}, \; k' \in Z$$

$$\text{și } f'(x) = -1.$$

$$\text{Deci, } f(x) = -x + \frac{3\pi}{4} + k\pi,$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi\right), \; k \in Z.$$

83. Să se calculeze derivata funcției $y = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ (cu $x \in R_+$) și să se explice rezultatul.

R. Funcția y are aceeași derivată cu $z = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$; apoi se observă că $\sin y = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ (1) și că $\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, (2); înlocuind (2) în (1), rezultă $y - z = 0$; dacă $x \in [1, \infty)$.

Să se calculeze derivatele funcțiilor următoare și să se explice rezultatele obținute:

84.
$$y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}, \; x \in R \setminus \{1\}.$$

R. $y' = -\frac{1}{1+x^2}$, aceeași derivată ca a funcției $z = \operatorname{arcctg} x$; se găsește $y - z = \frac{\pi}{4}$ dacă $x \in [1, \infty)$ și $|y - z| = \frac{3\pi}{4}$, dacă $x \in (-\infty, 1)$.

85.
$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

R. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, aceeași derivată cu $z = \frac{1}{2} \arcsin x$ și $y - z = 0$, dacă $x \in [-1, 1]$.

86. Să se calculeze derivata funcției $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ și să se explice rezultatul.

$$\textbf{R. } f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Pe intervalul $(-1, 1)$, $f(x)$ are aceeași derivată cu $g(x) = -2 \operatorname{arctg} x$.

Notînd $y = 2 \operatorname{arctg} x$ și $z = \arccos \frac{2x}{1 + x^2}$, avem $x = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ și $\cos z = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}} = \sin y$,

cu $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $z \in (0, \pi)$. (1) sau $\sin y - \cos z = 0 \Leftrightarrow \sin y - \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 0$; $\frac{\pi}{2} - z = y + 2k\pi$, sau încă $\frac{\pi}{2} - z = \pi - y + 2k'\pi$ și ținînd seamă de (1), rezultă $y - z = \frac{\pi}{2}$.

87. $$y = \arcsin(16x^5 - 20x^3 + 5x).$$

R. $y' = \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}}$, aceeași derivată cu funcția $z = 5 \arcsin x$. Avem deci $\sin \frac{z}{5} = x$ și $\sin y = 16 \sin^5 \frac{z}{5} - 20 \sin^3 \frac{z}{5} + 5 \sin \frac{z}{5} = \sin z$.

88. $$y = \arccos(8x^4 - 8x^2 + 1).$$

R. $y' = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}$ aceeași derivată cu aceea a funcției $z = 4 \arcsin x$. Avem $\sin \frac{z}{4} = x$ și $\cos y = 8 \sin^4 \frac{z}{4} - 8 \sin^2 \frac{z}{2} + 1 = -8 \sin^2 \frac{z}{4}\left(1 - \sin^2 \frac{z}{4}\right) + 1 = \cos z$.

89. Să se calculeze derivatele funcțiilor:

$y = \operatorname{arctg} \frac{a + x}{1 - ax}$, $z = \operatorname{arctg} \frac{a + b + x - abx}{1 - ab - ax - bx}$ și să se explice rezultatul.

R. $y' = z' = \frac{1}{1 + x^2}$; rezultă $y - z = \operatorname{arctg} b$.

90. Să se calculeze derivatele funcțiilor

$y = \ln \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}$, $z = \ln \frac{x}{2 + x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}$, cu $x \neq 0$ și să se explice rezultatul.

R. $y' = z' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$; $y - z = \ln 3$.

91. Să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcțiilor:

$$f(x) = \frac{1}{x + 1},\ x \in R\setminus\{-1\},$$

$$g(x) = \frac{1}{x - 1},\ x \in R\setminus\{1\},$$

$$h(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},\ x \in R\setminus\{\pm 1\}.$$

R. Putem scrie $f(x) = (x + 1)^{-1}$ și calculînd primele două derivate, obținem $f'(x) = (-1)(x + 1)^{-2}$, $f''(x) = (-1)^2\, 2!\,(x + 1)^{-3}$, de unde se poate deduce că

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x + 1)^{-(n+1)}, \tag{1}$$

Presupunem că rezultatul de la (1) este adevărat $\forall n \in N$ şi calculăm derivata în (1)

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(-n-1)(x+1)^{-(n+2)} = (-1)^{n+1}(n+1)!\,(x+1)^{-(n+2)},$$

ceea ce demonstrează că formula (1) este adevărată pentru orice $n \in N$.

Pentru $g(x)$ procedăm asemănător şi obţinem: $g^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x-1)^{-(n+1)}$.

Pentru $h(x)$ se observă că putem scrie $h(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ şi ţinînd seamă de rezultatele anterioare, rezultă

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,\frac{(x+1)^{n+1} + (x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

Să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcţiilor:

92. $$f(x) = \frac{1}{a+bx},\quad x \in R\setminus\left\{-\frac{a}{b}\right\}.$$

R. Ţinînd seamă de cele arătate la exerciţiul anterior, din aproape în aproape obţinem

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!\,b^n}{(a+bx)^{n+1}}.$$

93. $$f(x) = \frac{1}{1-x^2},\quad x \in R\setminus\{\pm\}1.$$

R. Se observă că $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$ şi ţinînd seamă de rezultatele de la exerciţiul 91, obţinem

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

94. $$f(x) = \frac{1}{a^2-b^2x^2},\quad x \in R\setminus\left\{-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right\}.$$

R. Cazul general al exerciţiului precedent, se observă însă că

$$f(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-bx} + \frac{1}{a+bx}\right],\text{ obţinîndu-se}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!\,b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{(a+bx)^{n+1}}\right].$$

Se vor lua în considerare cazurile în care n este par sau impar, rezultînd:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{n/2} C_{n+1}^{2h}\, a^{n-2h} b^{2h} x^{2h} \text{ pentru } n = \text{număr par}$$

$$\text{şi } f^{(n)}(x) = \frac{n!\,b^{n+1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{n+1}^{2h+1}\, a^{n-2h-1} b^{2h} x^{2h+1},\ \text{pentru } n = \text{număr impar}.$$

95. $$f(x) = \frac{x}{a^2-b^2x^2}.$$

R. Avem $q(x) = \frac{1}{2b}\left[\frac{1}{a-bx} - \frac{1}{a+bx}\right]$ rezultind

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!b^n}{(a^2 - b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{n/2} C_{n+1}^{2h+1} a^{n-2h} b^{2h} x^{2h+1} \text{ pentru } n = \text{număr par}$$

$$\text{şi } f^{(n)}(x) = \frac{n!\, b^{n+1}}{(a^2 - b^2x^2)^{n+1}} \sum_{h=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{n+1}^{2h} a^{n-2h+1} b^{2h} x^{2h} \text{ pentru } n = \text{număr impar.}$$

96. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ cu } x \in R_+^*$$

R. Calculînd primele trei derivate obținem:

$$f'(x) = (-1)\frac{1}{x^2}(\ln x - 1); \; f''(x) = (-1)^2\frac{1\cdot 2}{x^3}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2}\right),$$

$$f'''(x) = (-1)^3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \text{ de unde se deduce că}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right],$$

ceea ce se poate verifica și prin inducție (a se vedea ex. 91, ultimul rezultat).

97. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției

$$f(x) = x^{n-1}e^{1/x} \text{ este } (-1)^n\frac{f(x)}{x^{2n}}.$$

R. Se va folosi metoda inducției, presupunînd mai întîi că afirmația este adevărată pentru derivata de ordinul $(n - 1)$.

98. Se dă funcția $f(x) = x^2e^{-\frac{x}{a}}$ și se cere să se calculeze $f^{(n)}(0)$.

R. $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n(n-1)}{a^{n-2}}$, pentru $n > 2$.

Să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcțiilor:

99. $f(x) = x^n \ln x$, cu $x \in R_+^*$.

R. Primele două derivate ale lui $f(x)$ sînt:

$$f'(x) = nx^{n-1}\left(\ln x + \frac{1}{n}\right), \; f''(x) = n(n-1)x^{n-2}\left(\ln x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right),$$

de unde se deduce că

$$f^{(n)}(x) = n!\left[\ln x + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right],$$ rezultat ce se poate verifica și prin inducție completă.

Altfel. Se poate aplica formula lui *Leibniz*:

$$(u\cdot v)^{(n)} = C_n^0u^{(n)}v + C_n^1u^{(n-1)}v' + C_n^2u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^n uv^{(n)}, \quad (1)$$

unde u și v sînt funcții de x definite pe un domeniu comun, fiecare putînd fi derivați de n ori, $u^{(n)}$ și $v^{(n)}$ reprezentînd derivatele de ordinul n ale funcțiilor respective.

În cazul de față, notînd cu $u(x) = x^n$ și $v(x) = \ln x$, avem:

$$u' = nx^{n-1},\ u'' = n(n-1)x^{n-2},\dots,u^{(n)} = n!$$

$$v' = \frac{1}{x},\ v'' = (-1)\frac{1}{x^2},\dots,\ v^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$ și aplicînd formula (1), rezultă:

$$f^{(n)}(x) = (u\cdot v)^n = n!\ln x + n\cdot(n-1)!x\cdot\frac{1}{x} +$$

$$+ n(n-1)(n-2)!\,x^2(-1)\frac{1}{x^2} + \dots = n!\left[\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right]$$

100. $$f(x) = \frac{(1+x)^2 - \ln x}{x},\ \text{cu } x \in R_+^*.$$

R. Se observă că putem scrie $xf(x) = (1+x)^2 - \ln x$, (1) și luăm derivata de ordinul n în (1), aplicînd formula lui *Leibniz* în partea întîi, iar în partea a doua se ține seama că

$(1 + x^2)^{(n)} = 0$ (pentru $n > 2$). Avem $xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = (-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n}$.

Dar, derivatele succesive în (1) sînt:

$$\left.\begin{aligned}
&xf'(x) + f(x) = 2(1+x) - \frac{1}{x},\\
&xf''(x) + 2f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2},\\
&xf'''(x) + 3f''(x) = -\frac{2}{x^3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Înmulțind cele $(n+1)$ relații din (2) și (1), respectiv cu $1, -x, \frac{x^2}{2!}, -\frac{x^3}{3!},\dots$

$\dots, (-1)^n\frac{x^n}{n!}$ și adunînd și ambele părți, rezultă

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[-\ln x + 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right].$$

101. $$f(x) = \ln(a + x),\ \text{cu } a + x > 0 \text{ și}$$

$$g(x) = \ln\frac{a+bx}{a-bx},\ \text{cu } \frac{a+bx}{a-bx} > 0 \text{ și } x \neq \frac{a}{b}.$$

R. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(a+x)^n}$. Pentru $g(x)$ se calculează mai întîi $g'(x) = \frac{2ab}{a^2 - b^2x^2}$

și apoi se ține seama de exercițiul 95, rezultînd

$$f^{(n)}(x) = b(n-1)!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(a+bx)^n} + \frac{1}{(a-bx)^n}\right].$$

102. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $f(x) = \cos ax$ şi să se deducă din aceasta derivatele de ordinul n ale funcţiilor $g(x) = \sin^2 x$ şi $h(x) = \cos^2 x$.

R. Avem $f'(x) = -a \sin ax = a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f''(x) = -a^2 \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) \text{ şi, în general, } f^{(n)}(x) =$$

$$= a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (1)$$

relaţia (1) fiind adevărată pentru $\forall n \in N$, ceea ce se poate demonstra derivînd încă o dată în (1).

Pentru $g(x)$ şi $h(x)$ se trece de la puteri de cosinus şi sinus la cosinusuri de arce duble: $g(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ şi $h(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, apoi se ţine seama de derivata de ordinul n a lui $f(x)$, obţinîndu-se $g^n(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$ şi $h^{(n)}(x) = 2^{n-1}\left(\cos 2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

103. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei $f(x) = (\arcsin x^2)$, pentru valoarea particulară $x = 0$.

R. Avem $f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, cu $x \in (-1, 1)$ şi $f''(x) = \frac{2}{1 - x^2} + \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$ (1);

dar din (1) se deduce $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) - 2 = 0$, (2).

Se derivează de $(n - 1)$ ori relaţia (2), folosind formula lui *Leibniz* (pentru cele două produse) şi se obţine:

$$(1 - x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n - 1)xf^{(n)}(x) - (n - 1)^2 f^{(n-1)}(x) = 0, \quad (3)$$

şi făcind în (3), $x = 0$, rezultă $f^{(n+1)}(0) - (n - 1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0$, adică: $f^{(n+1)}(0) = 0$, pentru $n =$ par şi $f^{(n+1)}(0) = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \ldots (n - 1)^2$, cînd $n =$ impar.

104. Se consideră funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \in R\setminus\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

şi se cere să se studieze continuitatea şi derivabilitatea în punctul $x = 0$.

R. Fie un şir arbitrar $x_n \to 0$ $(x_n \neq 0)$, avem $f(x_n) = x_n \sin\frac{1}{x_n}$ şi $|f(x_n)| = \left|x_n \sin\frac{1}{x^n}\right| \leqslant$ $\leqslant |x_n| \to 0$ şi în consecinţă $f(x_n) \to 0$, rezultînd din aceasta că funcţia respectivă este continuă în origine.

Derivata este $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$; fie şirul $x_n = \frac{2}{(2n + 1)\pi}$ care pentru $n \to \infty$, $x_n \to 0$. Avem $f'(x_n) = \sin\frac{(2n + 1)\pi}{2} - \frac{(2n + 1)\pi}{2}\cos\frac{(2n + 1)\pi}{2} = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$;

rezultă că dacă $n = 2k$, $f'(x_{2k}) \to 1$, iar dacă $n = 2k + 1$, $f'(x_{2k+1}) \to -1$ şi în consecinţă funcţia $f(x)$ nu este derivabilă în origine.

Să se cerceteze continuitatea și derivabilitatea funcțiilor, în punctele menționate :

105. $f(x) = |x^4 - x^2|e^x$, în punctele $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

R. Funcția este continuă în punctele respective, dar nu este derivabilă în $x = -1$ și $x = 1$.

106. $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \in R\setminus\{0\} \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$

în punctul $x = 0$, cu $n = 0, 1, 2, 3$.

R. $f_0(x)$ este discontinuă $f_1(x)$ este continuă dar nu este derivabilă, $f_2(x)$ are derivată discontinuă în origine, iar $f_3(x)$ are derivată continuă în origine.

107. $f(x) = \ln \frac{|x| + 1}{(x - 1)^2}$, în punctul $x = 0$.

R. $f(x)$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct deoarece $f'_d(0) = 3$ și $f'_s(0) = 1$.

108. $f(x) = |x + 1| \operatorname{arctg} \frac{1}{x - x^2}$, în punctul $x = -1$.

R. Funcția este continuă pe $R\setminus\{0, 1\}$ dar nu este derivabilă în $x = -1$ deoarece $f'_s(-1) \neq f'_d(-1)$.

109. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \in (0, \infty) \\ 0, & \text{pentru } x \in (-\infty, 0] \end{cases}$$

și se cere să se precizeze dacă este derivabilă de două ori pe R.

R. $f'_s(0) = 0$, $f'_d = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, dar $\lim\limits_{x \searrow 0} f'_d(x) = 0$ (regula lui *l'Hôspital*):

$$f''_d = \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

și $\lim\limits_{x \searrow 0} f''_d(x) = 0$ (se folosește tot regula lui *l'Hospital*), fiind deci derivabilă de două ori pe R.

110. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x - 1|}{\ln |x + 1|}, & \text{pentru } x \in R\setminus\{-1\}, \\ 0, & \text{pentru } x = -1. \end{cases}$$

R. Problema continuității și derivabilității se pune în punctele $x = -1$ și $x = 1$ (unde modulii au valoarea zero). Se va constata că funcția este continuă în punctele $x = -1$ și $x = 1$ dar nu este derivabilă în aceste puncte, deoarece $f'_s(-1) = \infty$ $f'_d(-1) = -\infty$,

$$f'_s(1) = -\frac{1}{\ln 2}, \quad f'_d(1) = \frac{1}{\ln 2}.$$

111. Dacă

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ax + b}, & \text{pentru } x < 0, \\ \dfrac{1}{x^2 - 9x + 21}, & \text{pentru } x \geq \end{cases}$$

să se determine numerele reale a şi b astfel încît funcţia f să fie continuă şi derivabilă pentru $x = 0$. Funcţia f astfel determinată este derivabilă pentru orice $x \in R$?

R. Din $l_s = l_d = f(0)$ şi $f_s'(0) = f_d'(0)$, rezultă $a = -9$ şi $b = 21$, $f(x)$ nu este derivabilă în $x = \frac{7}{3}$.

112. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor:

$$f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| e^{-\frac{1}{|x|}}, & \text{pentru } x \in R^* \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)3^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}, & \text{pentru } x \in R^* \\ 0, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

R. $f(x)$ nu este continuă în $x = -1$, dar este continuă în $x = 0$ şi $x = 1$. Deoarece $f_s'(0) = f_d'(0) = 0$ funcţia este derivabilă în 0; cum $f_s'(1) = -\frac{1}{2e}$ şi $f_d'(1) = \frac{1}{2e}$, rezultă că nu este derivabilă în 1. Pentru $g(x)$: $l_s(0) = 1$ şi $l_d(0) = 0$, în consecinţă funcţia nu este continuă şi deci nu este nici derivabilă în $x = 0$.

113. Se consideră funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{e^{\frac{1}{x+1}} - bx}, & \text{pentru } x \in (-\infty, -1), \\ c, & \text{pentru } x = -1, \\ \dfrac{\sin a(x+1)}{\operatorname{tg} b(x+1)}, & \text{pentru } x \in (-1, \infty), \end{cases}$$

unde $a, b, c \in R$.

1° Se cere să se găsească relaţia între parametrii a, b, c astfel încît $f(x)$ să fie continuă în $x = -1$.

2° Să se cerceteze apoi derivabilitatea funcţiei respective, a, b, c avînd valorile determinate la pct. 1°.

R. 1° Pentru $\frac{a}{b} = c$, funcţia este continuă în $x = -1$.

2° Funcţia nu este derivabilă în $x = -1$.

114. Se dă funcţia $f(x) = xe^x$ şi se cere să se verifice valabilitatea de aplicare a teoremei creşterilor finite pe intervalul $[0, 1]$, determinîndu-se punctul $x = c \in (0, 1)$ care verifică teorema sus-menţionată.

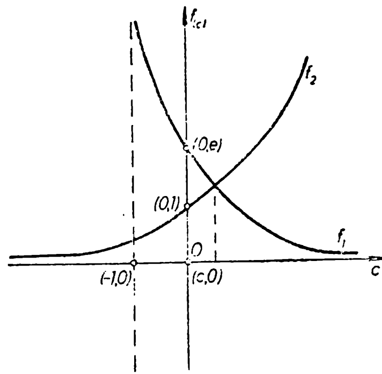


Fig. VI — 114

R. Pe intervalul [0, 1] $f(x)$ este continuă şi derivabilă, deci există cel puţin un punct de abscisă $x = c$ pentru care avem:

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c), \Leftrightarrow c = e^c(1 + c), \qquad (1)$$

Determinarea lui c din (1) se face cu ajutorul graficelor $f_1(c) = \frac{e}{1 + c}$ şi $f_2(c) = e^c$ date în figura VI-114 din care rezultă că $c \in (0, 1)$, ceea ce demonstrează problema.

Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic derivatele următoarelor funcţii:

115. $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 6)\sqrt{3 + 2x - x^2} + 4 \arcsin \frac{x - 1}{2}$.

R. $f'(x) = (x + 1)\sqrt{3 + 2x - x^2}$.

Graficul este arătat în figura VI-115.

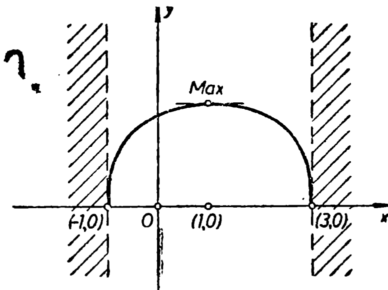


Fig. VI — 115

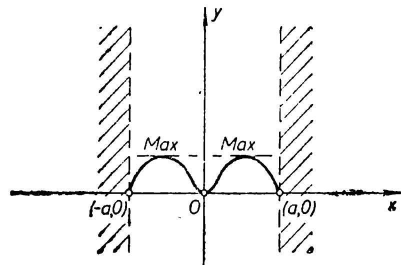


Fig. VI — 116

116. $f(x) = \frac{1}{8}x(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}$, dacă $a > 0$.

R. $f'(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$.

Graficul este arătat în figura VI-116.

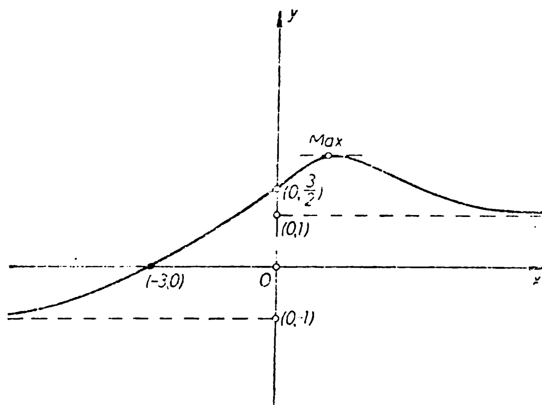


Fig. VI — 117

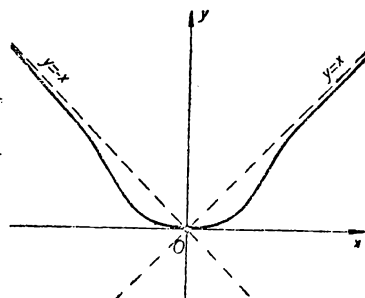


Fig. VI — 118

118. $f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - x}{\sqrt{1 + x^2} + x}$.

R. $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$. Graficul este arătat în figura VI-118.

119. $f(x) = -\frac{1}{3} \ln(x + 1) + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

R. $f'(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$. Graficul este arătat în figura VI-119. Curba punctată nu trebuie luată în considerare, fiindcă funcţia $f(x)$ este definită pe mulţimea $(-1, \infty)$.

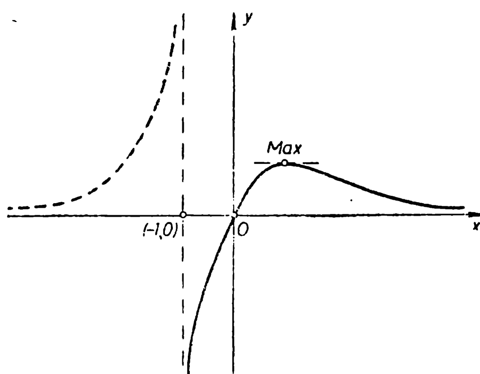


Fig. VI — 119

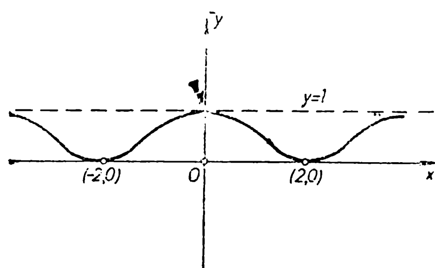


Fig. VI — 120

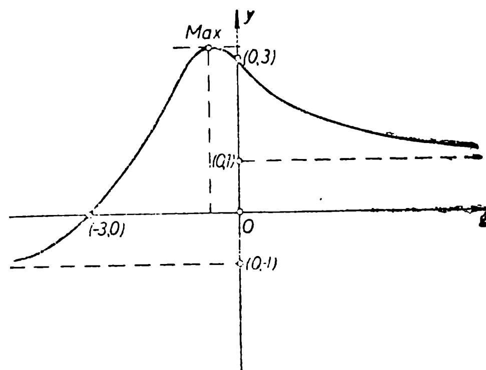


Fig. VI — 121

121. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + x + 1} + \frac{11}{4\sqrt{2}} \ln\left(x + \frac{1}{4} + \frac{2x^2 + x + 1}{2}\right).$

R. $f'(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$. Graficul este dat în figura VI-121.

Să se traseze graficele funcţiilor:

122. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x - 1}$, $x \neq 1$.

R. $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$,

$y = x + 3$ asimptotă oblică, $x = 1$ asimptotă verticală.

Tabloul variaţiei:

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$ 0	$-$	$-$	$-$ $-$	‖	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 (max)	↘	$-$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8 (min)	↗	$+\infty$
$f''(x)$		⌢			⌢		‖	⌣			⌣

Graficul este dat în figura VI-122.

123. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$.

R. $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$, $x = -1$ asimptotă verticală, $y = x - 5$ asimptotă oblică.

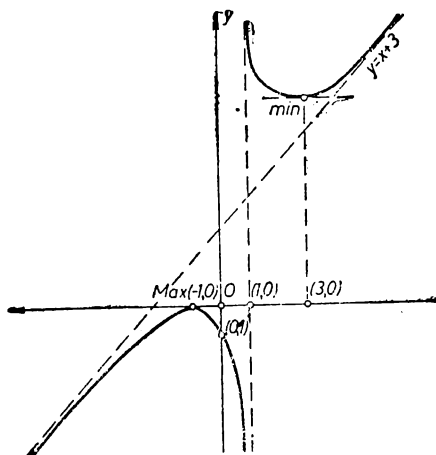


Fig. VI — 122

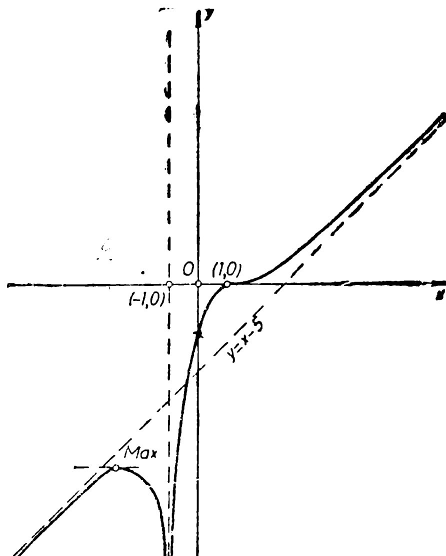


Fig. VI — 123

Tabloul variației:

x	$-\infty$			-5			-1	0				1			$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	|	+	+	+	+	+	0	+	+ +
$f(x)$	$-\infty$	↗		$-\frac{27}{2}$	↘	$-\infty$	|	$-\infty$	↗	-1	↗		0	↗	$+\infty$

Graficul este dat în figura VI-123.

124. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

R. Graficul este dat în figura VI-124.

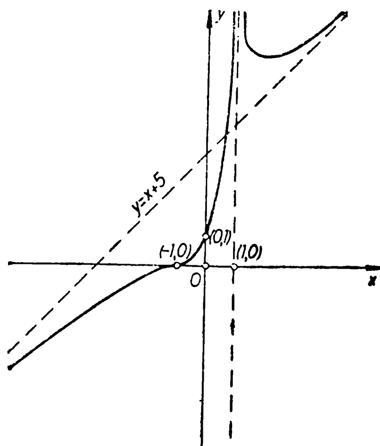


Fig. VI — 124

125. $f(x) = \dfrac{2(x-2)^2}{x^3}$, $x \neq 0$.

Tabloul variației este:

x	$-\infty$		0		2		$6-2\sqrt{3}$		6		$6+2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -$	‖	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +$	0	$-\ -$	$-$	$-$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	↗	↗	$\frac{4}{27}$	↘		0
$f''(x)$		$-\ -\ -$	‖	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +$	0	$-\ -\ -$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +$

Graficul este dat în figura VI 125.

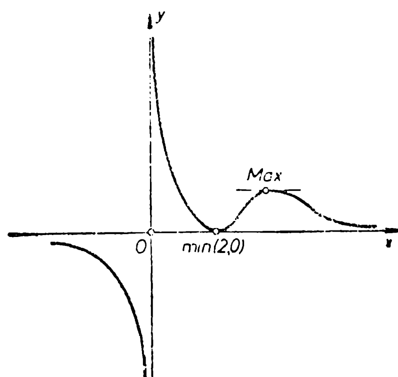


Fig. VI — 125

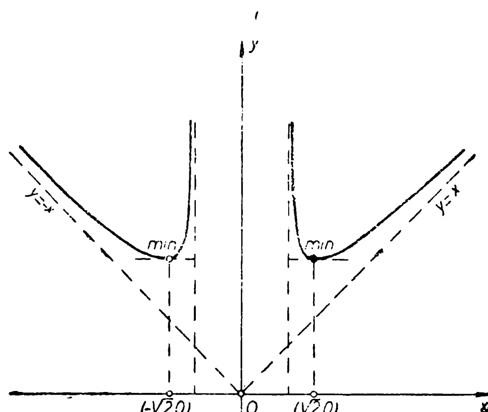


Fig. VI — 126

126. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

R. Graficul este dat în figura VI-126.

127. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{-x^2+x+6}}$ $x \in (-\infty, -2) \cup [1, 3)$.

R. Asimptote verticale $x = -2$, $x = 3$.

Asimptotă orizontală $y = 0$ la ramura spre $-\infty$.

Tabloul variației:

x	$-\infty$		-2		1		3	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	//////	$+$	$+$	$+$	//////
$f(x)$	0	↗	$+\infty$	//////	0	↗	$+\infty$	//////

Graficul este dat în figura VI-127

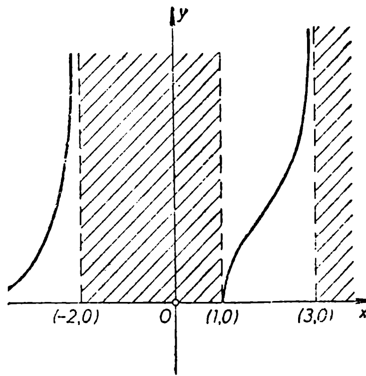


Fig. VI — 127

128. $f(x) = 2\cdot\frac{(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

R. Punct de maxim $M\left(-\frac{3}{4},\ \frac{7\sqrt{7}}{4}\right)$, puncte de minim:

$m_1\left(-1,\ \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$, $m_2(1,\ 0)$, puncte de inflexiune cuprinse în intervalele $\left(-1,\ -\frac{3}{4}\right)$ şi

$\left(-\frac{3}{4}\ \ 0\right)$. Asimptote oblice: $y = x - \frac{9}{4}$, $y = -x + \frac{9}{4}$.

Graficul este dat în figura VI-128.

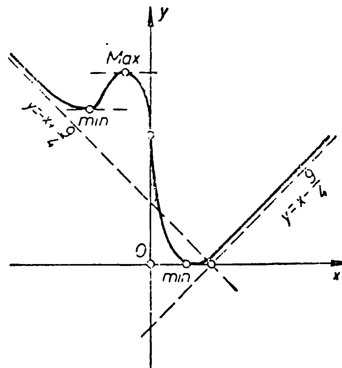


Fig. VI — 128

129. $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Să se găsească apoi ecuaţia tangentei în punctul de abscisă $x = 1$.

R. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$			$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			$-\frac{1}{3}$		1			$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−		+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗		Max	↘		$-\infty$		0	↗		$+\infty$

Ecuația semitangentei în punctul de abscisă $x = 1$ este $x = 1$.
Graficul este dat în figura VI-129.

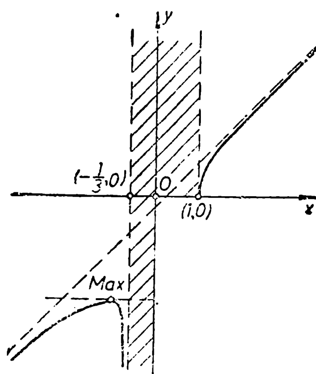


Fig. VI—129

130. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$.

R. $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Graficul este dat în figura VI-130.

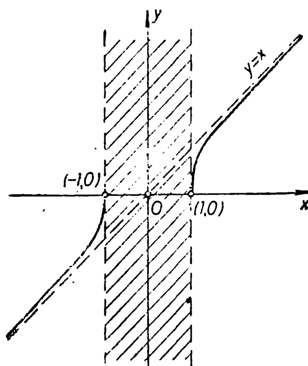


Fig. VI — 130

Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-1	x_1'		x_2'	1		$+\infty$
$f'(x)$	+ +	+ +		0	− −	0		+ + +	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	0				0	↗	$+\infty$

131. $f(x) = x^4 + |3x^2 - 4|$.

R. Graficul este dat în figura VI-131.

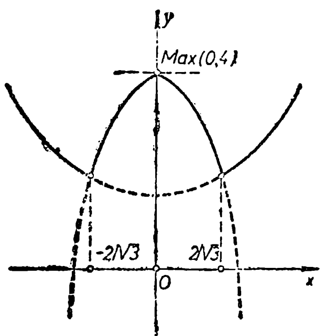


Fig. VI — 131

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$	$-2/\sqrt{3}$		0		$2/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	− − −		+ + +	0	− −		+ + + +	+
$f(x)$	∞ ↘	16/9	↗	4	↘	16/9	↗	∞

132. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{|x|}$.

R. Graficul este dat în figura VI-132.

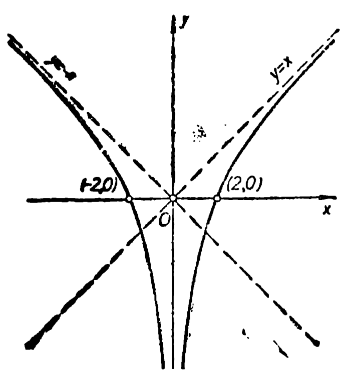


Fig. VI — 132

Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		-2			0		2		∞
$f'(x)$	$-$ $-$	$-$	$-$ $-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

133. $f(x) = x\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$.

R. Tabloul de variaţie

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$ $+$	$+$	0	$-$ $-$	$-$ | $+$	$+$	0	$+$ $+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

graficul fiind dat in figura VI-133.

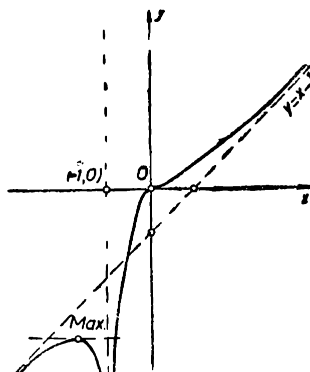


Fig. VI — 133

134. $f(x) = \dfrac{x^2|x|}{|x^2-1|}$.

R. Graficul rezultă din tabloul de variaţie

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$ $-$	0	$+$	$+$ | $-$	$-$	0	$+$	$+$ | $-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ | ∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞ | ∞	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

bisectoarele axelor de coordonate fiind asimptote oblice; figura VI 134.

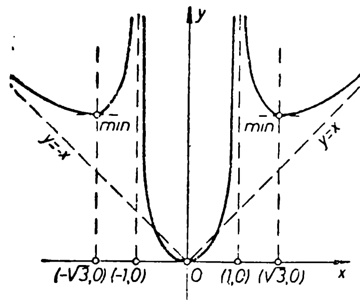


Fig. VI — 134

135. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|1 - x^2|}}$ şi $g(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{|1 - x^2|}}$.

R. Graficele respective sînt date în figura VI-135, *a* şi *b*.

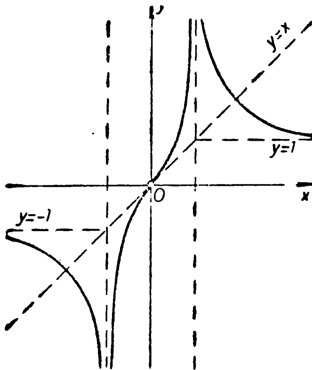


Fig. VI — 135, *a*

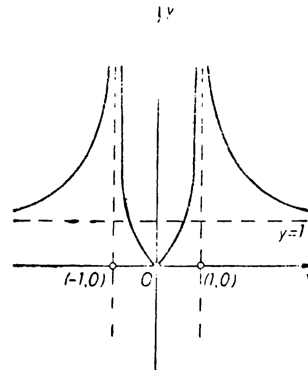


Fig VI — 135, *b*

136. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|1 - x^2|}}{x}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{|1 - x^4|}}{x}$.

R. Graficele celor două funcţii sînt date în figura VI-136, *a* şi *b*.

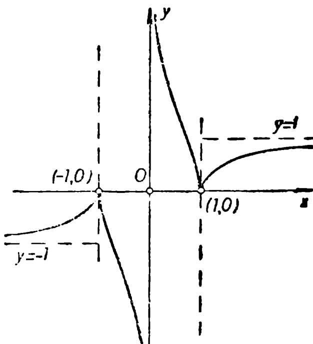


Fig. VI — 136, *a*

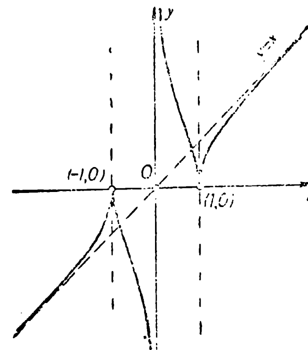


Fig. VI — 136, *b*

137. $f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$.

R. Graficul funcţiei $f(x)$ este dat în figura VI-137, a, iar al lui $g(x)$ în figura VI-137, b.

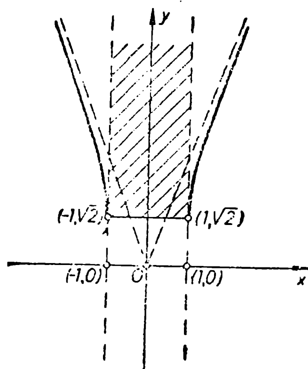


Fig. VI — 137, a

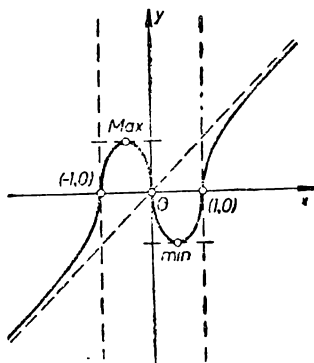


Fig. VI — 137, b

138. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

R. Graficul este dat în figura VI-138.

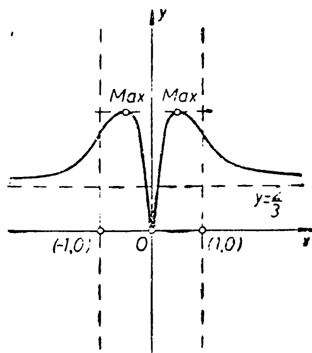


Fig. VI — 138

139. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x + 1}$, $x > 0$, $x \neq \dfrac{1}{e}$.

R $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, $y = 1$ asimptotă orizontală, $x = \dfrac{1}{e}$ asimptotă verticală.

Graficul este dat în figura VI-139.

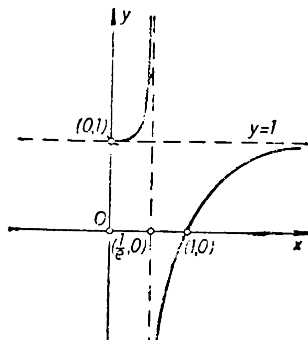


Fig. VI — 139

140. $f(x) = \ln(1 + |x|)$. $g(x) = x\ln(1 + |x|)$.

R. Graficele celor două funcţii sînt date în figura VI-140, *a* şi *b*.

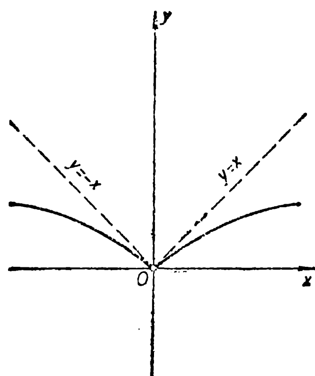


Fig. VI — 140, *a*

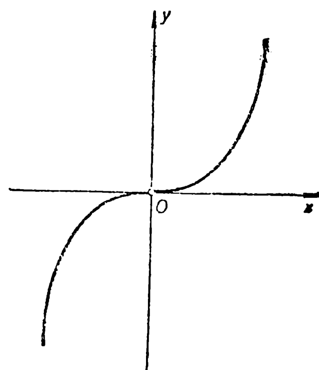


Fig. VI — 140, *b*

141. $f(x) = x - \ln|x|$, $g(x) = \dfrac{|\ln x|}{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x + \ln|x|}$

R. Graficele funcţiilor sînt date în figurile VI-141, *a*, *b*, *c*.

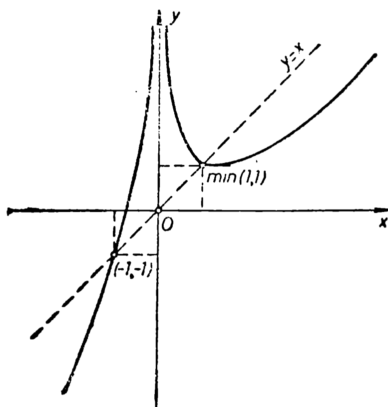


Fig. VI — 141, *a*

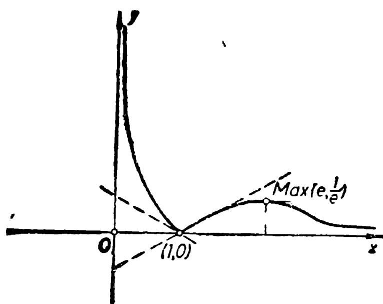


Fig. VI — 141, *b*

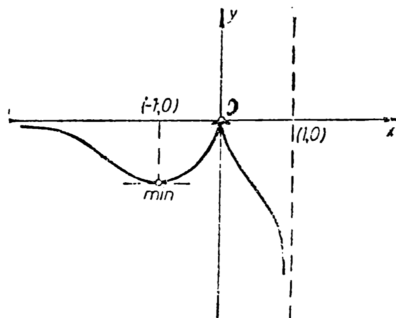


Fig. VI — 141, *c*

142. $f(x) = \dfrac{\ln x + x}{\ln x - x}$ și $g(x) = \dfrac{\ln x + x^2}{\ln x - x^2}$.

R. Graficele celor două funcții sînt date în figura VI-142.

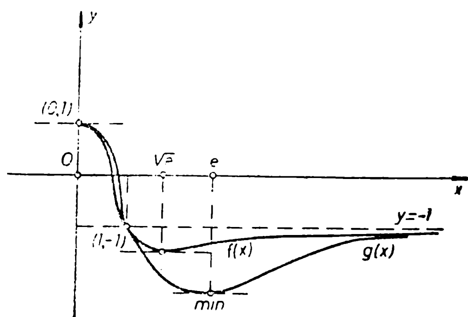


Fig VI — 142

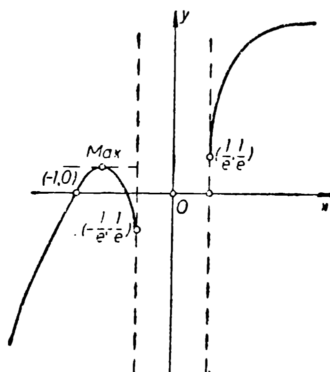


Fig. VI — 143

143. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x + \sqrt{1 + \ln |x|}.$$

R Domeniul de definiție: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right] \cup \left[\frac{1}{e}, \infty\right)$; graficul este dat în figura VI-143.

144. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{\ln |x+1|}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1. \end{cases}$$

R Funcția este definită pe $R \setminus \{-2; 0\}$ și este continuă și derivabilă în punctul $x = -1$. Tabloul este de variație

x	$-\infty$ $\quad -(e^2+1)$ $\quad -(e+1)$	-2 $\quad -1$	0 $\quad e-1$ $\quad e^2-1$ $\quad +\infty$.
$f'(x)$	− − − − − 0 +	+ 0 −	− 0 + + + +
$f(x)$	∞ ↘ ↘ min ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ min ↗ ↗ $+\infty$
$f''(x)$	− 0 + +	− −	+ + 0 − −

graficul corespunzător rezultînd din acesta.

145. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln |x| - 1}{\ln |x| + 1} e^{\frac{\ln |x|}{\ln |x| + 1}}, & x \in R \setminus \left\{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\right\}. \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

R. Funcție pară; se pot studia numai intervalele $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, tabloul de variație corespunzător fiind

x	0			$1/e$			$1/\sqrt[3]{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+$	$+$	|	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	e	$\nearrow$	$+\infty$	|	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt[3]{e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e

graficul complet rezultînd prin luarea în considerare și a intervalelor $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.

146. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

R. $y = x + 1$ este asimptotă oblică; graficul este dat în figura VI-146.

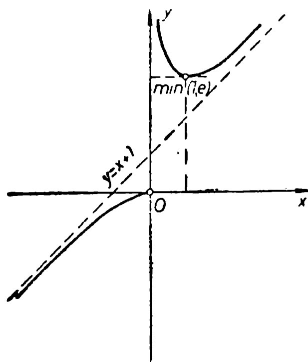


Fig. VI — 146

147. $f(x) = |x - 1|\ e^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{|x-1|}}$.

R. Graficele celor două funcții sînt date în figura VI-147, *a* și *b*.

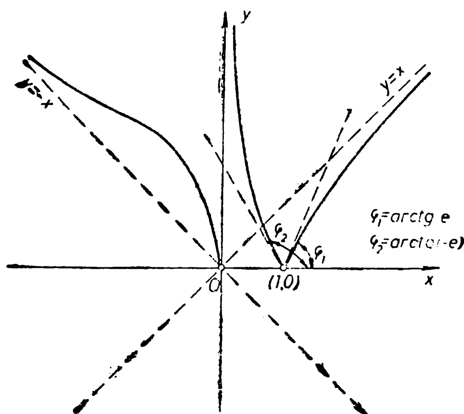


Fig. VI — 147, *a*

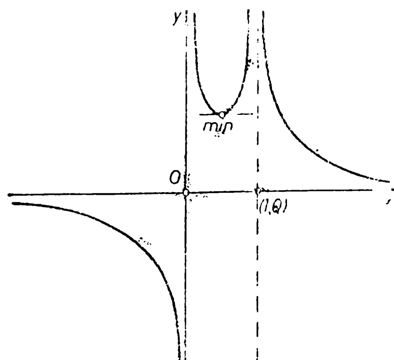


Fig. VI — 147, *b*

148. $f(x) = xe^{\frac{1}{|x-1|}}$.

R. $x \in R \setminus \{1\}$, dreptele $y = \pm 1$ sînt asimptote oblice; graficul este dat în figura VI-148.

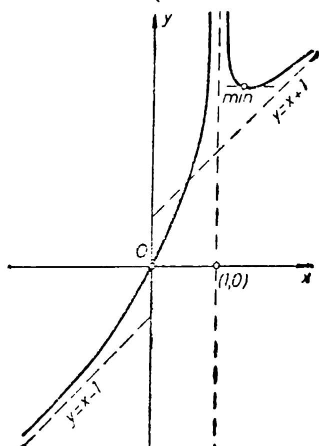


Fig. VI — 148

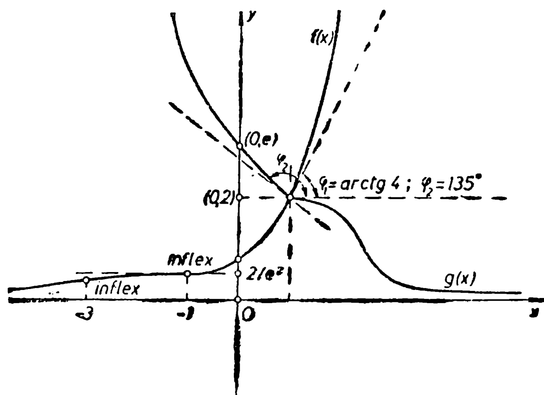


Fig. VI — 149

149. $f(x) = (x^2 + 1)e^{|x-1|}$, $g(x) = (x^2 + 1)e^{-|x-1|}$.

R. În figura VI-149 sînt date graficele celor două funcții.

150. $f(x) = \frac{x-1}{x+1} e^{\frac{1}{x(x+1)}}$.

R. Tabloul de variație este

x	$-\infty$			-1			x_1			0			1		∞
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	0	+	+	0	+ +	+	+	+	+
$f(x)$	1	↗	$+\infty$	0	↘		min	↗		0	$-\infty$	↗	0	↗	1

iar graficul este dat în figura VI-150.

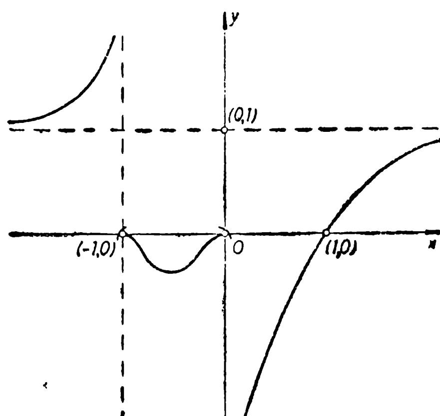


Fig. VI — 150

151. $f(x) = |1 - x|^{\frac{1}{x}}$.

R. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$e+1$		x'		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$ |	$-$	$-$ |	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e+1}}$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	1

iar graficul este dat în figura VI-151.

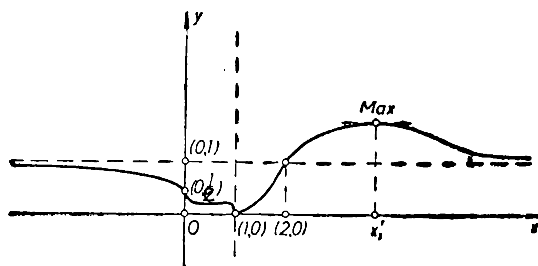


Fig. VI — 151

152. Se dă funcţia $f(x) = e^{\frac{x}{|x|-1}}$ şi se cere:

1° Să se traseze graficul.

2° Să se calculeze funcţia inversă $f^{-1}(x)$ trasîndu-se şi graficul acesteia.

R. Din $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}}, \text{ pentru } x \in [0, \infty) \\ e^{-\frac{x}{x+1}}, \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

rezultă că avem: $f_1^{-1}(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$, pentru $x \in (0, \infty)$ şi $f_2^{-1}(x) = -\frac{\ln x}{\ln x + 1}$,

ale căror grafice sînt date în figura VI-152.

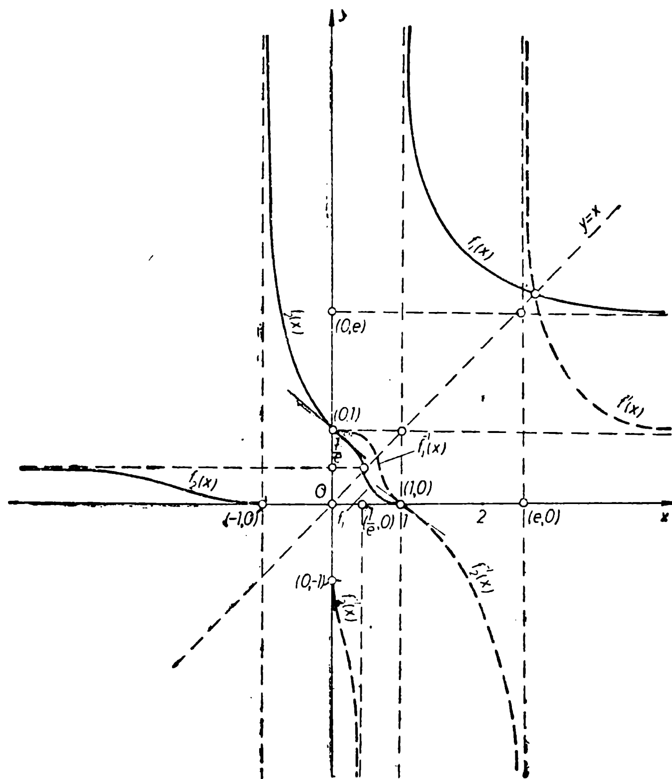


Fig. VI — 152

Să se traseze graficele funcţiilor:

153. $f_1(x) = xe^{|x|}$

$f_2(x) = (x - 1)e^{|x-1|}$

$f_3(x) = (x^3 - 1)e^{|x-1|}$

$f_4(x) = (x^2 - 1)e^{|x-1|}$

$f_5(x) = (x^2 - 4)e^{|x-2|}$.

R. Graficele respective sînt date în figura VI-153, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

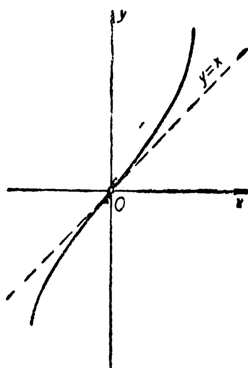


Fig. VI — 153, *a*

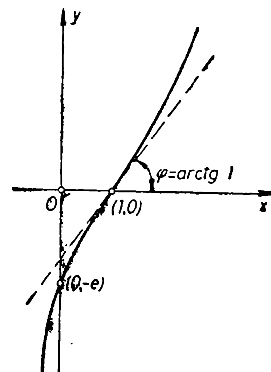


Fig. VI — 153, *b*

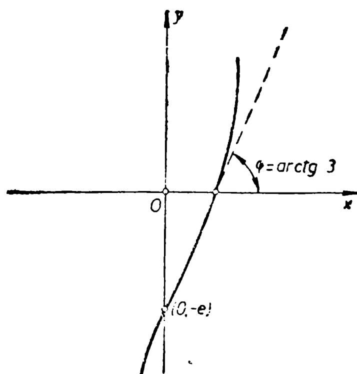


Fig. VI — 153, c

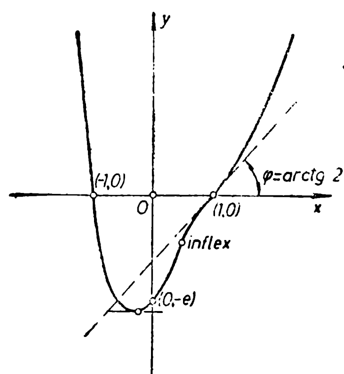


Fig. VI — 153, d

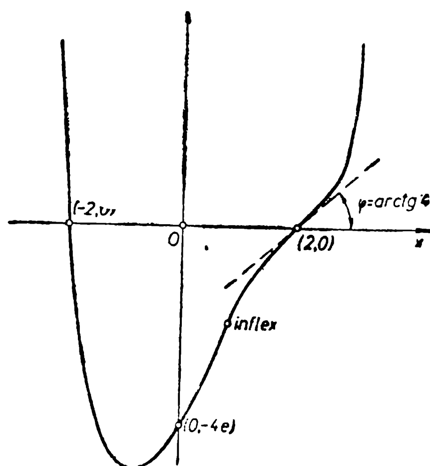


Fig. VI — 153, e

154. $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$.

R. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$ $+$		$+$ $+$	0	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$
$f(x)$	0	↗	7	↗	$3e$	↘	e^2	↗	$+\infty$

graficul trasîndu-se cu uşurinţă (fig. VI-154).

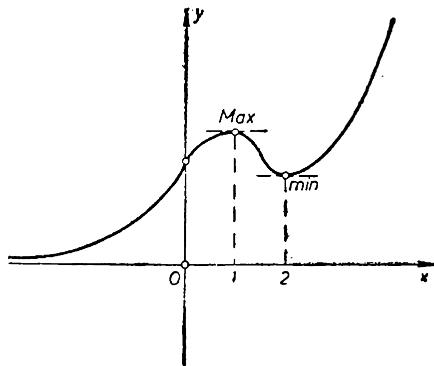


Fig. VI — 154

155. $f(x) = \begin{cases} |x|^x, & \text{pentru } x \neq 0, \\ 1, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$

R. Tabloul de variație este

x	$-\infty$			$-\frac{1}{e}$			0			$\frac{1}{e}$			$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	$(-\infty)$ | $(-\infty)$	−	−	0	+	+	+ +
$f(x)$	0		↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘		1		↘	$e^{-\frac{1}{e}}$			↗ $+\infty$

iar graficul este dat în figura VI-155.

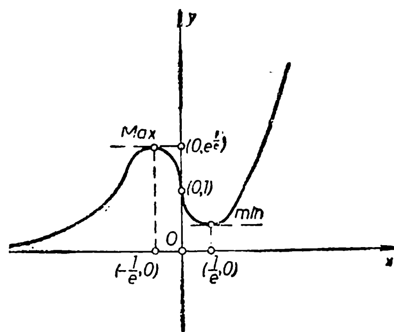


Fig. VI — 155

156. $f(x) = \arcsin \dfrac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \arccos \dfrac{1-x}{1+x}$.

R. $x \in [0, \infty)$ graficele celor două funcții sînt date în figura VI-156.

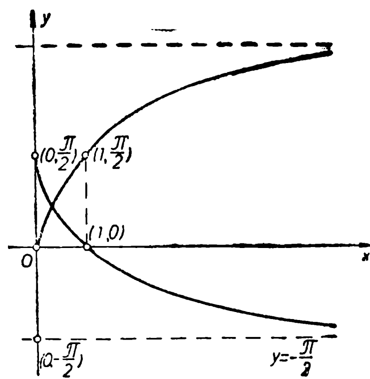


Fig. VI — 156

157. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1 - x^2}$;

R. $x \in R \setminus \{\pm 1\}$; tabloul de variație.

x	$-\infty$		-1			0		1			∞
$f'(x)$	+	+	+	+	+		+	+	+	+	+
$f(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0

158. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

R. Graficul este dat în figura VI-158.

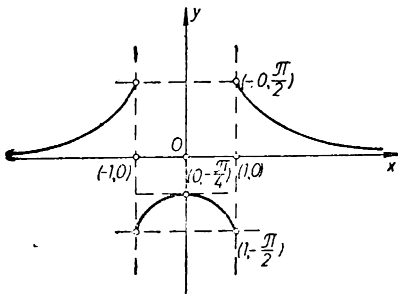


Fig. VI — 158

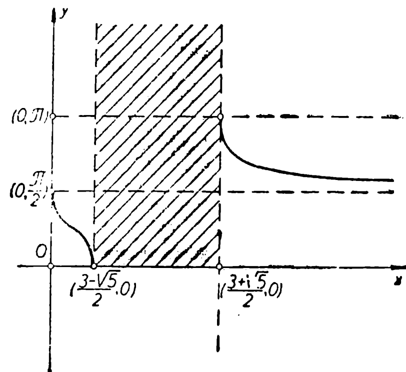


Fig. VI — 159

159. $f(x) = \arccos \dfrac{\sqrt{x}}{1 - x}$.

R. Din $-1 \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{1 - x} \leqslant 1$ rezultă $x \in \left[0, \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}; \infty\right)$; graficul este dat în figura VI-159.

160 $f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$, pentru $x \in [0, 9]$.

R. Tabloul de variaţie este

x	0		1		4		9
$f'(x)$	|	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1	↘	-1

iar graficul este dat în figura VI-160.

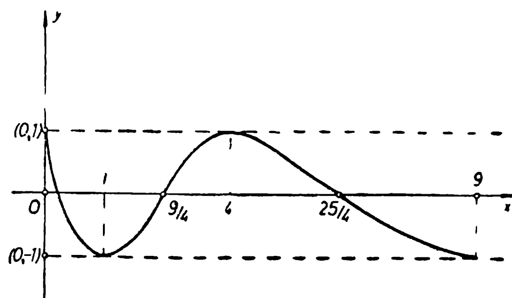


Fig. VI — 160

161. $f(x) = \sin 2x - 2\sin x,\ x \in [0, 2\pi]$.

R. Tabloul variaţiei este

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	$-\ -$	0	$+\ +$		$+\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	0
$f(x)$	0	↘	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↗	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

iar graficul este dat în figura VI-161.

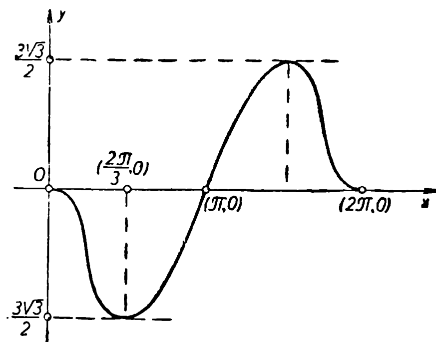


Fig. VI — 161

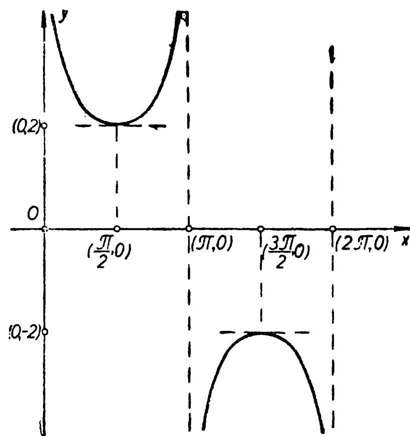


Fig. VI — 162

R. Graficul (fig. VI-162) rezultă din tabloul de variaţie:

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ +$	|	$+ +$	0	$- - - -$	|
$f(x)$		∞ ↘	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

163. $f(x) = \cos 2x + \sin x$ şi $g(x) = \cos 2x - \sin x$.

R. Graficele celor două funcţii sînt date în figura VI-163.

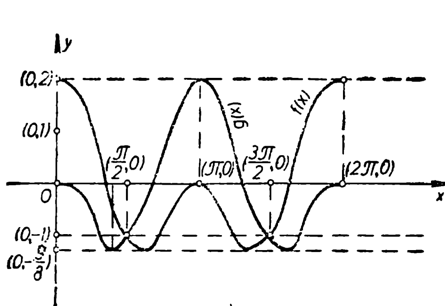


Fig. VI — 163

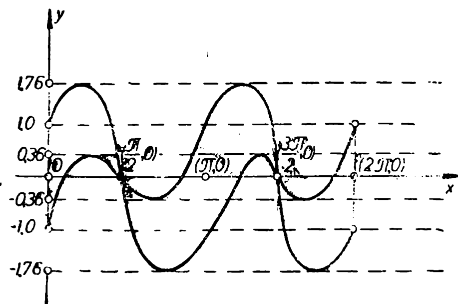


Fig. VI — 164

164. $f(x) = \sin 2x + \cos x$. $g(x) = \sin 2x - \cos x$.

R. Graficele celor două funcţii sînt date în figura VI-164.

165. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţiile:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}},\quad f_2(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}},\quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)^2}},$$

$$f_4(x) = \sqrt[4]{x^4 - x^3},\ f_5(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(1+x)^3}},\quad f_6(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{1+x}},\quad f_7(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{1-x}}.$$

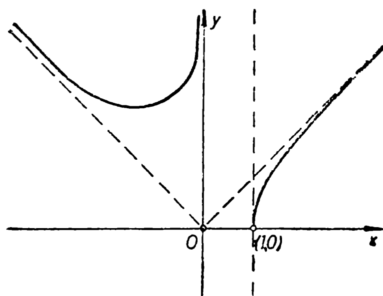


Fig. VI — 165, *a*

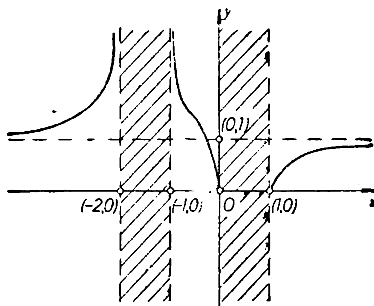


Fig. VI — 165, *b*

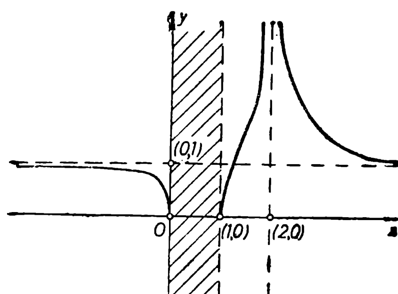


Fig. VI — 165, c

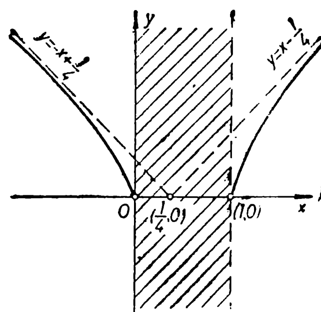


Fig. VI — 165, *d*

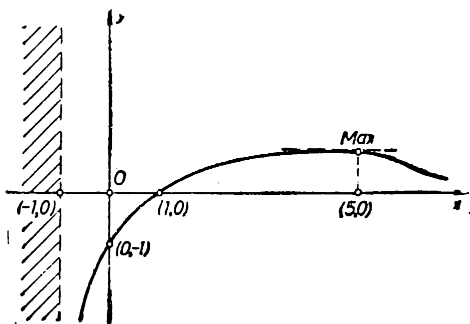


Fig. VI — 165, e

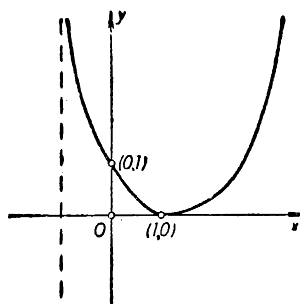


Fig. VI — 165, *f*

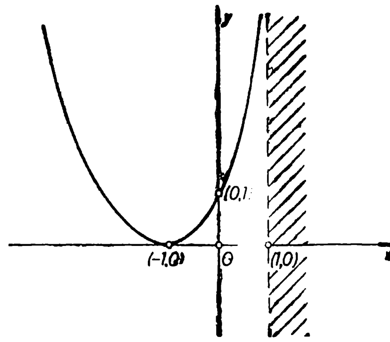


Fig. VI — 165, *g*

R. Graficele corespunzătoare sînt date în figura VI-165, *a—g*.

166. $f_1(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $f_2(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$, $f_3(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x+2}}$, $f_4(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$,

$$f_5(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

R. Graficele corespunzătoare sînt date în figura VI-166, *a—e*.

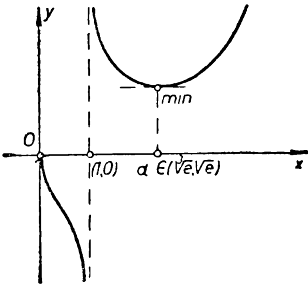


Fig. VI — 166, *a*

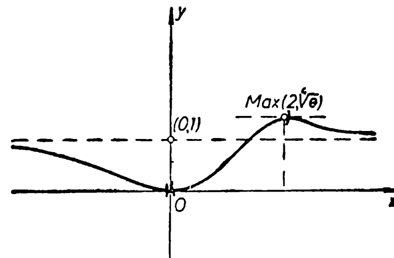


Fig. VI — 166, *b*

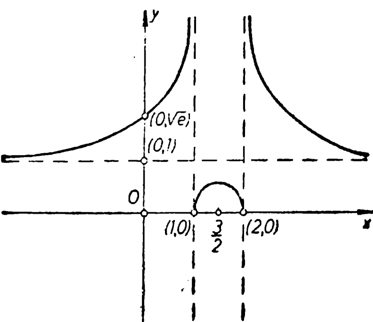


Fig. VI — 166, *c*

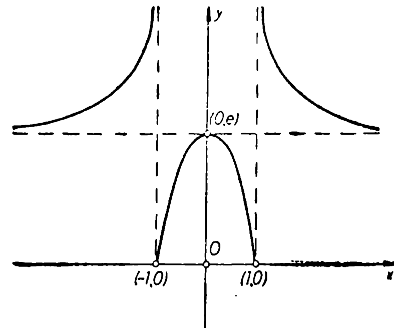


Fig. VI — 166, *d*

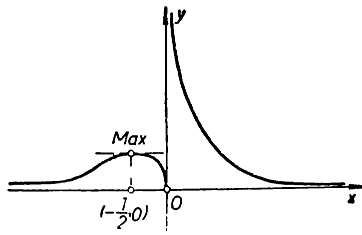


Fig. VI — 166, e

167. $f_1(x) = (x-2)e^x + |x+2|$, $f_2(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$,

$f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,e^x$, $f_4(x) = \dfrac{x^2-5}{x+1}\,e^x$.

R. Graficele respective sînt date în figura VI-167, *a—d*.

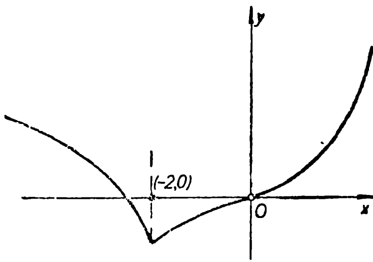


Fig. VI — 167, *a*

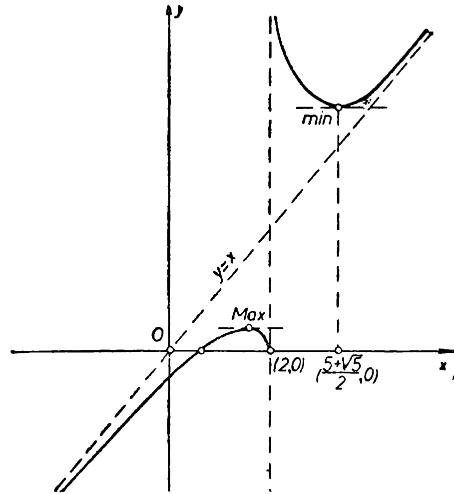


Fig. VI — 167, *b*

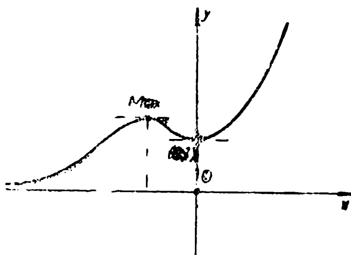


Fig. VI — 167, *c*

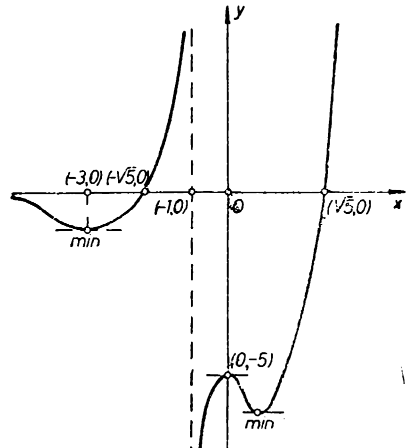


Fig. VI — 167, *d*

168. $f_1(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1+x}$, $f_2(x) = \left(\frac{x}{x - a}\right)^x$, $a > 0$, $f_3(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

R. Graficele corespunzătoare sînt date în figura VI-168, a—c.

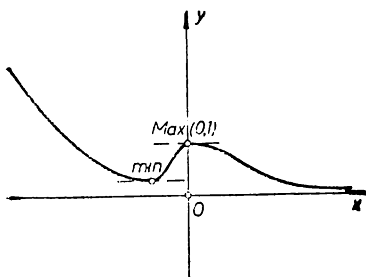


Fig. VI — 168, a

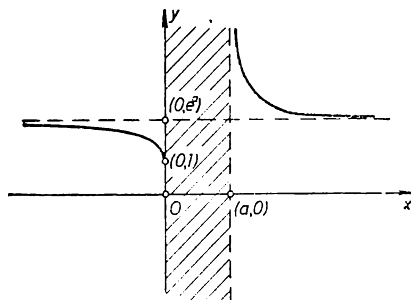


Fig. VI — 168, b

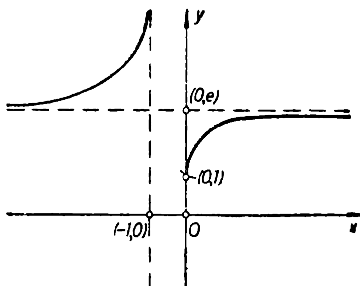


Fig. VI — 168, c

169. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţiile:

$$f(x) = \arcsin\frac{(1 + x)^2}{2(1 + x^2)}, \quad g(x) = \arcsin(2x^2 - 1),$$

$$h(x) = \arccos\frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

R. Graficele funcţiilor respective sînt date în figura VI-169, a—c,

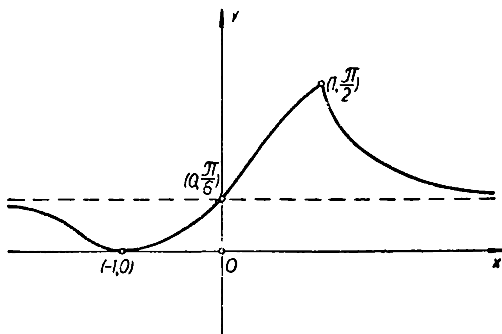


Fig. VI — 169, a

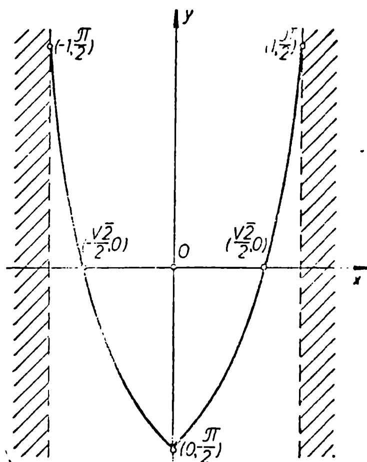


Fig VI — 169, *b*

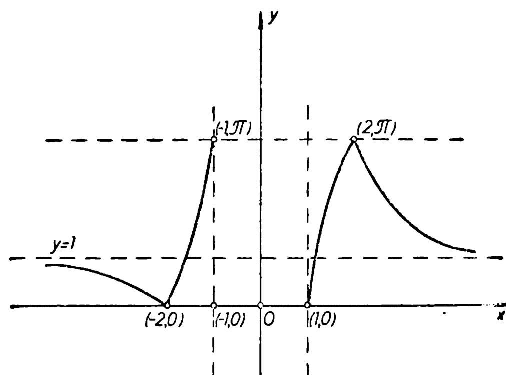


Fig. VI — 169, *c*

170. Să se traseze graficele funcţiilor:

$$f_1(x) = 2^x - x^2, \; f_2(x) = 3^x - x^3.$$

R. Graficele corespunzătoare sînt date în figura VI-170, *a* şi *b*.

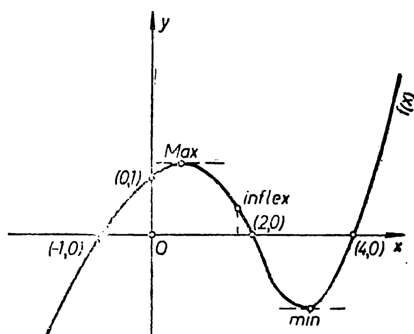


Fig. VI — 170, *a*

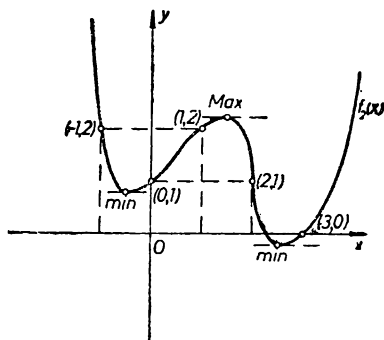


Fig. VI — 170, *b*

171. Să se traseze graficele funcţiilor:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^{\frac{1}{2}}, \; f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - x^{\frac{1}{3}}.$$

R. Graficele corespunzătoare sînt date în figura VI-171, *a* şi *b*,

172. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = e^{-|x|}\sqrt{\sin x}, \text{ cînd } x \in \bigcup[2k\pi, (2k+1)\pi], \; k \in Z,$$

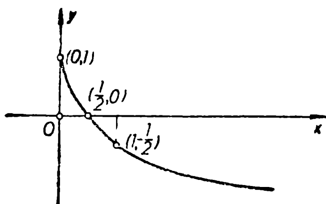


Fig. VI — 171, *a*

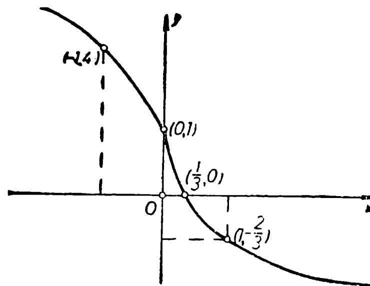


Fig. VI — 171, *b*

R. Funcţia nu este derivabilă în punctele de abscisă $x=k\pi$, $k \in Z$; graficul lui $f(x)$ pe intervalul $(-4\pi,\ 5\pi]$ este dat în figura VI-172.

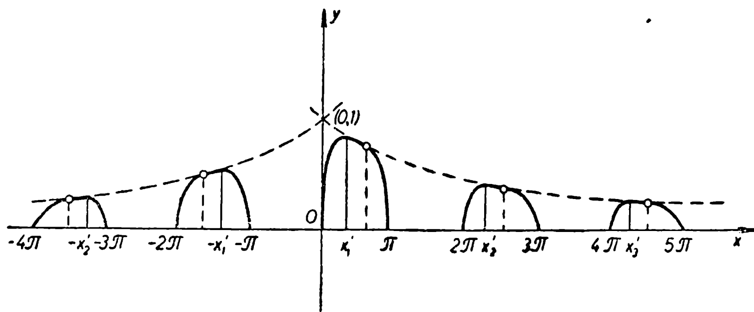


Fig. VI — 172

173. $f(x)=\sqrt{\cos^4 x-\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\dfrac{1}{16}}+\sqrt{\cos^4 x-\dfrac{3}{2}\cos^2 x+\dfrac{9}{16}}$, pentru $x \in [0,\ 2\pi]$.

R. Avem $f(x)=\left|\cos^2 x-\dfrac{1}{4}\right|+\left|\cos^2 x-\dfrac{3}{4}\right|$.

174. $f(x)=\dfrac{1+|\cos x|}{1-|\sin x|}$ şi $g(x)=|\cos x|-|\sin x|+1$.

R. Graficele respective sînt date în figura VI-174.

175. Se dă funcţia

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{pentru } |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & \text{pentru } |x|>1\end{cases}$$

şi se cere: 1° Să se studieze derivabilitatea.
2° Să se traseze graficul lui $f(x)$.

R. 1° Funcţia este derivabilă pe $R\setminus\{-1,\ 1\}$.
2° Graficul este dat în figura VI-175.

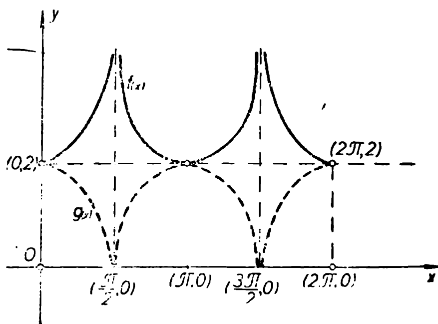


Fig VI — 174

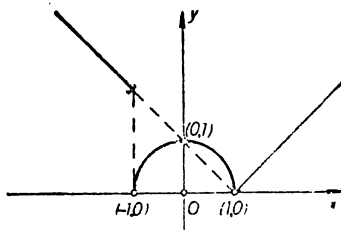


Fig VI — 175

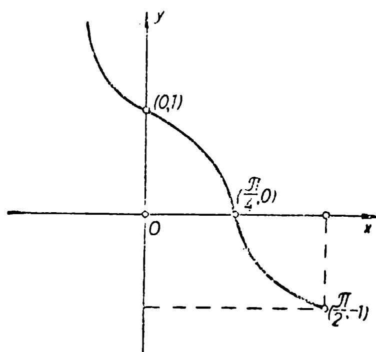


Fig VI — 176

176. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (-\infty, 0], \\ a \sin x + b \cos x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

și se cere:

1° Să se determine constantele a și b astfel ca $f(x)$ să fie continuă și derivabilă pe tot domeniul său de definiție.

2° Să se traseze graficul funcției respective, a și b avînd valorile determinate la 1°.

R. 1° $a = -1$, $b = 1$. 2° Graficul (fig. VI-176) rezultă din tabloul de variație

x	$-\infty$				0				$\pi/4$				$\pi/2$
$f'(x)$	−	−	−	−	−1 |	−1	−	−	−	−	−	−	−
$f(x)$	∞		↘		1		↘		0		↘		−1
$f''(x)$	+	+	+	+	+ |	−	−	−	0	+	+	+	−

177. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & \text{pentru } x \in (0, e], \\ ax + b, & \text{pentru } x \in (e, \infty) \end{cases}$$

și se cere: 1° Să se determine a și b astfel încît $f(x)$ să fie derivabilă în e. 2° Să se traseze graficul lui $f(x)$, a și b avînd valorile determinate la pct. 1°.

R. 1° $a = \dfrac{3}{e}$, $b = -2$.

2° Graficul funcției este dat în figura VI-177.

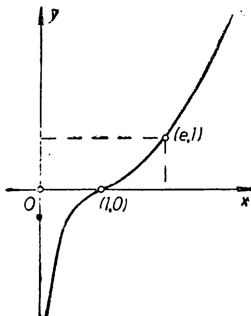


Fig. VI — 177

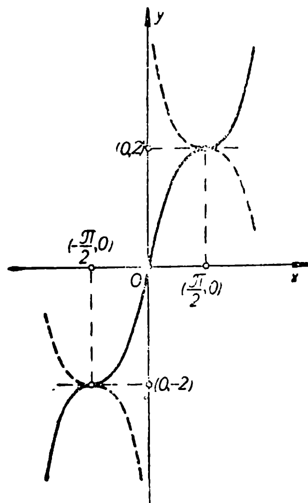


Fig. VI — 178

178. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{pentru } x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right), \\ m \sin x, & \text{pentru } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ a'x + b'x - 1, & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

și se cere:

1° Să se determine parametrii a, a', b, b' și m astfel încît funcția să fie continuă și derivabilă pe R.

2° Să se traseze graficul lui $f(x)$ cu parametrii determinați la pct. 1° și $a = 4$.

R. 1° $a' = -a$, $b = a\pi$, $b' = a\pi$, $m = \frac{\pi^2}{4}a - 1$, $a =$ arbitrar.

2° Graficul funcției este dat în figura VI-178 în care s-a luat $a = 4$.

179. Se consideră funcția

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2 - x^2), & x \in [-1, 1], \\ \frac{ax^2 + b}{x^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

și se cere:

1° Să se determine constantele a și b astfel ca funcția să fie continuă și derivabilă pe R.

2° Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left[\frac{ax^2 + b}{x^2}\right]^{\ln(2 - x^2)}$, unde a și b au valorile de la pct. 1°.

3° Să se traseze graficul lui $f(x)$, a și b avînd valorile determinate la pct. 1°.

R. 1° $a = -1$, $b = 1$. 2° 1. 3° Graficul este dat în figura VI-179.

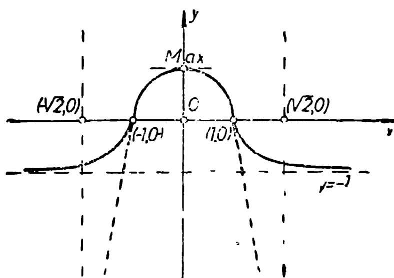


Fig VI — 179

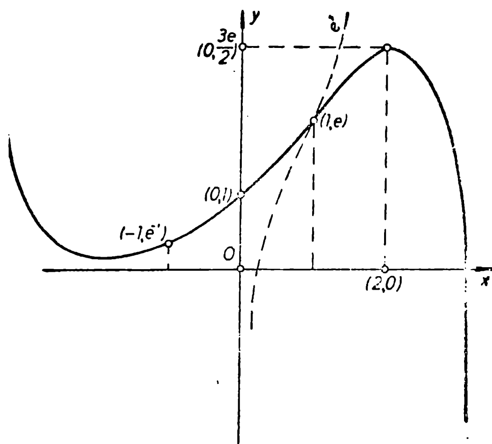


Fig. VI — 180

180. Se dă funcția

$$f(x) = \begin{cases} a_1(x+2)^2 + b_1, & x \in (-\infty, -1), \\ e^x & , x \in [-1, 1], \\ a_2(x-2)^2 + b_2, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

și se cere:

1° Să se determine constantele a_1, b_1, a_2, b_2 astfel ca $f(x)$ să fie derivabilă pe R.

2° Să se traseze graficul funcției $f(x)$, a_1, a_2, b_1, b_2 avînd valorile determinate la pct. 1°.

R. 1° $a_1 = b_1 = \frac{1}{2e}$; $a_2 = -\frac{e}{2}$, $b_2 = \frac{3e}{2}$.

2° Graficul este dat în figura VI-180.

181. 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \frac{ax^2}{x+k}$, unde $a > 0$ și $k > 0$.

2° Să se determine apoi a și k astfel încît:

— asimptota oblică a curbei să fie paralelă cu bisectoarea întîi a axelor de coordonate;

— distanța dintre punctele extreme ale funcției să fie egală cu $\sqrt{20}\,k$.

3° Să se găsească punctele de pe curbă situate în cadranul II în care se pot duce tangente la curbă paralele cu bisectoarea a doua a axelor de coordonate (a și k avînd valorile determinate la 2°).

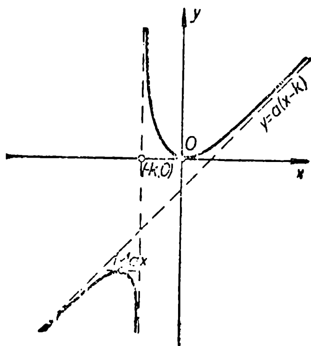


Fig. VI — 181

R. 1° Derivata $f'(x) = a\frac{x(x+2k)}{(x+k)^2}$; asimptota oblică $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ și } n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = -ak$$

și deci

$$y = a(x-k).$$

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		$-2k$		$-k$		0		∞
$f'(x)$	$+$ $+$	$+$	0	$-$ $-$	‖	$-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-4ak$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

iar graficul este dat în figura VI-181. 2° $a = 1$, $k = 1$. 3° $\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

182. 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x + k},$$

unde $a > 0$ și $k > 0$.

2° Să se determine valorile lui k în funcție de a, astfel ca tangentele la curba respectivă în punctele de intersecție ale acesteia cu Ox să formeze un unghi de 45°.

3° Să se reprezinte grafic funcția ce se obține cînd k are valoarea algebrică cea mai mică obținută la 2°.

R. 1° Tabloul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		x_2'		$-k$		0		a		x_1'		$2a$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$ $-$	‖	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_2')$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2a^3}{k}$	↘	0	↘	$f(x_1')$	↗	0	↗	$+\infty$

derivata întîi fiind $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2kx - 3ak - 2a^2}{(x + k)^2}$, iar rădăcinile acesteia $x'_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + 3ak + 2a^2}$.

Asimptota oblică are ecuația $y = x - (3a + k)$.

$$2° - 3° \quad k_1 = a, \; k_2 = -2a.$$

183. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + k}, \quad k > 0.$$

Se vor considera separat cazurile $a > 0$, $a < 0$.

2° Să se găsească funcția inversă $f^{-1}(x)$ trasîndu-se și graficul acesteia (luîndu-se de asemenea în considerare cazurile $a > 0$ și $a < 0$).

3° Să se găsească punctele comune ale funcțiilor $f(x)$ și $f^{-1}(x)$, în cazul particular $a = k = 1$.

R. 1° Cazul $a > 0$. Primele două derivate sînt

$$f'(x) = 2a\frac{-x}{(x^2+k)^2} \quad \text{şi} \quad f''(x) = -2a\frac{k-3x^2}{(x^2+k)^3}$$

iar tabloul de variaţie este

x	$-\infty$			$-\sqrt{\frac{k}{3}}$			0			$\sqrt{\frac{k}{3}}$			$+\infty$
$f'(x)$	+		+	+		+	0	−	−		−	−	−
$f(x)$	0		↗			↗	$\frac{a}{k}$		↘			↘	0
$f''(x)$	+	+	+	+	0	−	−	−	−	0	+	+	+

Pentru $a < 0$ tabloul de variaţie se deduce din precedentul.

2° $f_{1,2}^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{a-kx}{x}}$, corespunzător intervalelor respective.

3° Punctele comune sînt date de soluţiile sistemului $y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, dar acest sistem are o singură soluţie reală ($\approx 0{,}68$), care se obţine folosind teorema lui Rolle,

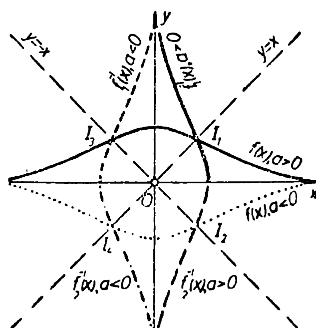


Fig. VI — 183

În figura VI 183 sînt date graficele lui $f(x)$ şi $f^{-1}(x)$, precum şi punctele de intersecţie respective.

184. Se dă funcţia $f(x) = \frac{ax}{x^2+k^2}$ şi se cere:

1° Să se studieze şi să se reprezinte grafic $f(x)$, considerîndu-se cazurile $a > 0$ şi $a < 0$.

2° Să se determine apoi a în funcţie de k astfel încît prima bisectoare a axelor să fie tangentă în origine la curbă (în cazul $a > 0$).

3° Să se găsească apoi funcţia inversă $f^{-1}(x)$, trasîndu-se şi graficul acesteia (se vor considera ambele cazuri: $a > 0$, $a < 0$).

R. 1° Tabloul de variație al funcției $f(x)$ pentru $a > 0$ este:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3k}$		$-k$		0		k		$\sqrt{3k}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↘		↘	$-\frac{a}{2k}$	↗	0	↗	$\frac{a}{2k}$	↘		↘	0
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
			(inflexiune)				(inflexiune)				(inflexiune)		

Tabloul de variație pentru $a < 0$ se deduce din precedentul. Graficul este dat în figura VI-184 (pentru ambele cazuri $a > 0$ și $a < 0$).

2° Trebuie ca $f'(0) = 1$, sau $\frac{a}{k^2} = 1$, de unde rezultă $a = k^2$. În acest caz, avem:

$$f(x) = \frac{k^2 x}{x^2 + k^2}.$$

Pentru $k = 0$ problema este imposibilă.

3° Se observă că funcția inversă se poate deduce din precedenta printr-o rotație a axelor cu 90° în sens trigonometric. Se folosesc formulele:

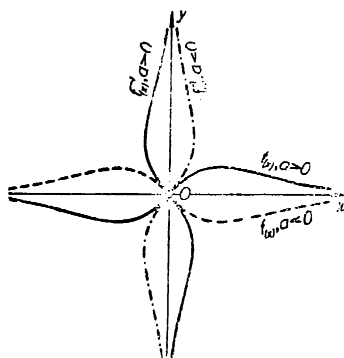


Fig VI — 184

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

rezultînd $x = -Y$, $y = X$ și deci $X = \frac{-aY}{Y^2 + k^2}$. Trasarea acestei funcții se face fără nici o dificultate, așa cum se vede în figura VI-184.

185. 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $f(x) = \frac{a - x}{x^2 - 5kx + 4k^2}$, unde a și $k > 0$, făcîndu-se diferite ipoteze asupra relațiilor de ordine dintre a și k.

2° Să se determine apoi a în funcție de k, astfel ca ordonatele punctelor extreme să verifice relația $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -14a$.

3° Să se determine apoi k astfel încît tangenta la curbă în punctul de intersecție al acesteia cu Oy să fie paralelă cu dreapta $9x + 16y = 0$. Să se scrie ecuația acestei tangente, k avînd valoarea determinată mai sus.

R. 1° Derivata întîi este $f'(x) = \frac{x^2 - 2ax + 5ak - 4k^2}{(x^2 - 5kx + 4k^2)^2}$ ale cărei rădăcini sînt $x'_{1,2} =$
$= a \pm \sqrt{a^2 - 5ak + 4k^2}$. (1)

Din (1) rezultă că dacă $k < a < 4k$, funcția nu are extreme.

Considerăm următoarele cazuri.

a) $a < k$. Pentru acest caz tabloul de variație este:

x	$-\infty$	x'_2	0	a	k	x'_1	$4k$	$+$
$f'(x)$	$+$ $+$	0	$-$ $-$	$-$	$-$	$-$ 0 $+$ $+$	$+$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$	max	$\searrow$ $\frac{a}{4k^2}$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$ min $\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$ 0

Graficul este dat în figura VI-185, *a*.

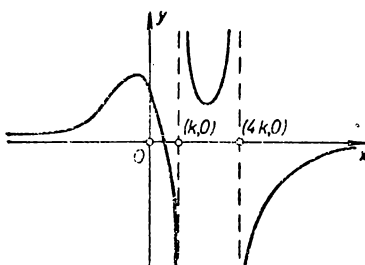


Fig. VI — 185, *a*

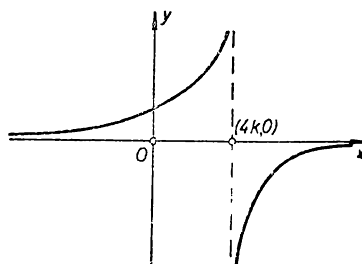


Fig VI — 185, *b*

b) $a = k$. În acest caz avem $f(x) = \frac{1}{4k - x}$ iar tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		$4k$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$ $+$	|	$+$ $+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4k}$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0

iar graficul este dat în figura VI-185, *b*.

c) $k < a < 4k$. Tabloul de variație pentru acest caz este:

x	$-\infty$	0	k	a	$4k$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$ $+$	$+$ $+$	| $+$ $+$	$+$ $+$	| $+$ $+$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{a}{4k^2}$ $\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$ $\nearrow$	0

iar graficul este dat în figura VI-185, *c*.

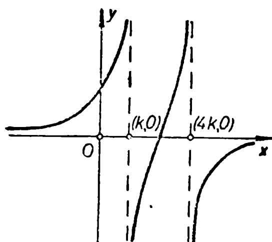


Fig. VI — 185, *c*

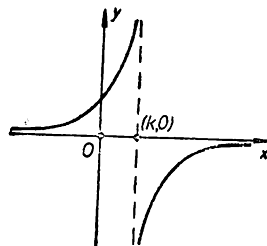


Fig. VI — 185, *d*

d) $a = 4k$. În acest caz $f(x) = \dfrac{1}{k - x}$, tabloul de variație fiind:

x	$-\infty$		0			k			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{k}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$ |	$-\infty$	$\nearrow$	0

iar graficul este dat în figura VI-185, *d*.

e) $a > 4k$. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		k		x_2'		$4k$		a	x_1'		∞
$f'(x)$		$+$	$+$		$+$ |		0	$-$ |	$-$	$-$		0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a}{4k^2}$	$\nearrow$	$+\infty$ |	$-\infty\ \nearrow$	max $\searrow$	$-\infty$ |	$+\infty$	$\searrow$	$0\ \searrow$	min	$\nearrow$	0

ar graficul este dat în figura VI-185, *c*.

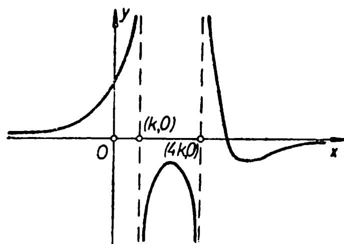


Fig. VI — 185, e

2° Avem $\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} = 10k - 4a$ și deci $10k = -10a$, $a = -k$. În acest caz $f(x) =$

$$= -\frac{x + k}{x^2 - 5kx + 4k^2},$$

3° Punctul de intersecție cu Oy este $\left(0, -\frac{1}{4k}\right)$ iar coeficientul unghiular al tangentei în acest punct este $m = f'(0) = \frac{-9}{16k^2}$; trebuie însă ca acest coeficient unghiular să fie același cu al dreptei $9x + 16y = 0$, adică trebuie să avem $-\frac{9}{16k^2} = -\frac{9}{16}$, de unde $k = \pm 1$. Rezultă că avem două funcții care corespund problemei și în consecință vom avea două tangente ale căror ecuații sînt $y \pm \frac{1}{4} = -\frac{9}{16}x$.

186. 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \frac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x^2 + 3kx + 2k^2}, \quad a > k.$$

2° Să se determine a în funcție de k în ipoteza că tangentele duse la curba reprezentativă în punctele de intersecție cu Oy și cu acela de pe Ox a cărui abscisă este cea mai mare, fac un unghi de 90°. Caz particular $k = 1$.

3° Să se determine valorile particulare ale lui k în funcție de a, astfel ca $f(x)$ să nu aibă puncte de extrem. Să se traseze curbele corespunzătoare.

R. 1° Derivata este $f'(x) = (a + k)\frac{3x^2 + 4(k - a)x - 6ak}{(x^2 + 3kx + 2x^2)^2}$ care se anulează pentru $x'_{1,2} = \frac{2(a - k) \pm \sqrt{2(2a^2 + 2k^2 + 5ak)}}{3}$. Cînd $2a^2 + 5ak + 2k^2 \leqslant 0$ sau cînd $k \in \left[-2a, -\frac{1}{2}a\right]$, $f(x)$ nu are extreme. (1)

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$			$-2k$				x_2'			$-k$			0		a		x_1		$2a$		∞
$f'(x)$	$+$		$+$			$+$		0		$-$			$-$	$-$		$-$		0		$+$		$+$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$		$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{a^2}{k^2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

graficul fiind dat în figura VI-186, a,

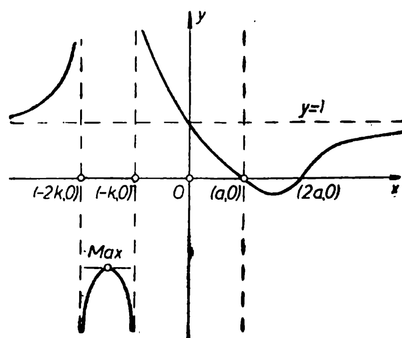


Fig. VI — 186, a

2° Tangenta în punctul $\left(0, \frac{a^2}{k^2}\right)$ are coeficientul unghiular $m_1 = f'(0) = -\frac{3a(a+k)}{2k^3}$, iar tangenta în punctul $(2a, 0)$ are coeficientul unghiular $m_2 = \frac{a}{2(a+k)(2a+k)}$. Din condiția de perpendicularitate a celor două tangente $1 + m_1m_2 = 0$ rezultă $3a^2 - 8ak^3 - 4k^4 = 0$.

3° Valorile lui k în funcție de a, pentru care $f(x)$ nu are puncte de extrem sînt cele de la (1).

Cînd $k = -2a$, $f_1(x) = \frac{x-a}{x-4a}$; iar cînd $k = -\frac{1}{2}a$, $f_2(x) = 2\frac{x-2a}{2x-a}$.

Tablourile de variație pentru aceste două funcții sînt:

pentru $f_1(x)$

x	$-\infty$		0		a		$4a$		∞
$f_1'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$-$	$-$
$f_1(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	1

pentru $f_2(x)$

x	$-\infty$		0		$\frac{a}{2}$			$2a$		∞
$f_2'(x)$	$+$		$+$	$+$	$+ \vert +$	$+$		$+$	$+$	$+$
$f_2(x)$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty \vert -\infty$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

iar graficele respective sînt date în figura VI-186, *b*, *c*.

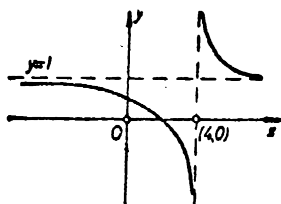


Fig. VI — 186, *b*

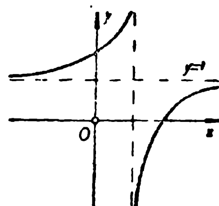


Fig. VI — 186 *c*

187. 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic, pentru $0 < x \leq 1$ funcțiile $y = mx + x^2 \ln x$.

2° Să se afle locul geometric al punctelor de extrem al curbelor de la 1°;

3° Să se reprezinte grafic locul geometric de la 2°.

R. 1° Primele două derivate sînt $y' = m + x(2\ln x + 1)$, $y'' = 2\ln x + 3$, de unde rezultă tablourile:

x	0				$e^{-3/2}$				1
y''	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	m	$\searrow$			$m - 2e^{-3/2}$		$\nearrow$		$(m+1)$

și

pentru $m \geqslant 2e^{-3/2}$

x	0		1
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	m

pentru $0 < m < 2e^{-3/2}$

x	0		x_1		x_2		1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	m

pentru $-1 < m \leqslant 0$

x	0			x_2			1
y'		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
y	0	$\searrow$		min	$\nearrow$		m

pentru $m \leqslant 1$

x	0		1
y'		$-$	
y	0	$\searrow$	m

Graficele corespunzătoare sînt date în figura VI-187.

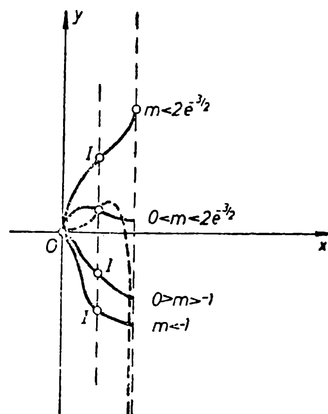


Fig. VI — 187

2°—3° Locul geometric al punctelor de extrem se află eliminînd pe m între ecuațiile:

$$mx + x^2 \ln x = y$$

$$m + x(2 \ln x + 1) = 0,$$

de unde rezultă

$$y = -x^2(1 + \ln x). \tag{1}$$

Derivînd (1), obținem:

$$y' = -x(3 + 2 \ln x), \tag{2}$$

de unde tabloul de variație:

x	0		$e^{-3/2}$			1
y'	0	+	0	$-$	$-$	-3
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-3}$		$\searrow$	-1

graficul corespunzător fiind trasat punctat în figura VI-187.

188. 1° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 1 + x + \frac{2x \ln |x|}{1 - x}.$$

2° Se notează derivata lui $f(x)$ prin $f'(x) = \frac{F(x)}{(1 - x)^2}$. Să se studieze variația lui $F(x)$ și să se deducă din aceasta variația lui $f(x)$.

3° Să se calculeze limitele lui $f(x)$ și $f'(x)$ pentru $x \to 0$ și $x \to 1$.

4° Se notează $F(x) = k \ln |x| - G(x)$; să se traseze cu ajutorul rezultatelor obținute anterior curbele reprezentative ale funcțiilor $w_1 = \ln |x|$ și $w_2 = G(x)$.

R. 1°—2° Funcția $f(x)$ este definită pentru orice $x \neq 0$ și $x \neq 1$, adică $x \in (-\infty, \cup$ $\cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Avem $f'(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{1 - x} + \frac{2}{1 - x} + \frac{2x \ln |x|}{(1 - x)^2} = \frac{F(x)}{(1 - x)^2}$, unde $F(x) = (x - 1)$ $(x - 3) + 2 \ln |x|$ și $F'(x) = \frac{2}{x}(x - 1)^2$.

Tabloul de variație al funcției $F(x)$ este:

x	$-\infty$		-1	a		0			1		$+\infty$
$F'(x)$	$-$	$-$		$-$	$-$	$+$	$+$		0	$+$ $+$	$+$
$F(x)$	$+\infty$	↘	8	↘	$-\infty$	$-\infty$	↗		0	↗	$+\infty$

$F(x)$ se anulează pentru o valoare a cuprinsă între -1 și 0. Tabloul de variație al funcției $f(x)$ este:

x	$-\infty$		-1	a			0			1		$+\infty$
$f'(x)$	1		$+$	0		$-$	$-$		$-$	$+$	$+$	1
$f(x)$	$-\infty$	↗	↗	max	↘	1	1	↘	0	0	↗	$+\infty$

3° Cînd $x \to 0$, $f'(x) \approx F(x) \approx 2 \ln |x| \to -\infty$, $x \ln x \to 0$, $f(x) \to 1$.

Cînd $x \to 1$, $\frac{F'(x)}{(x - 1)^2} = \frac{x - 1}{x} \to 0$ și deci $f'(x) = \frac{F(x)}{(x - 1)^2} \to 0$ iar $f(x) \to 0$.

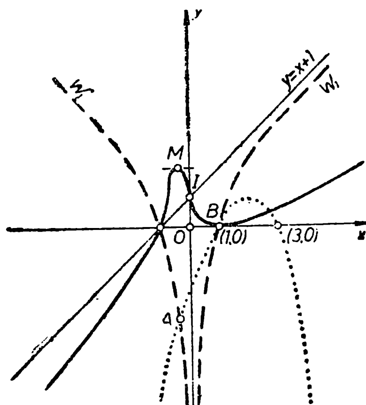
4° $F(x) = 2 \ln |x| - G(x)$, unde $G(x) = (x - 1) \cdot (3 - x)$; valoarea a care anulează pe $f'(x)$ și dă un maximum $f(a)$, este abscisa unui punct comun (altul decît $x = 1$) al curbelor,

$$\omega(x) = 2 \ln |x| \text{ și } \omega_2(x) = G(x).$$

Parabola $y = G(x)$ trece prin punctul $B(1, 0)$ unde tangenta la curbă are coeficientul unghiular $m = 2$; tangenta în acelaşi punct la curba $y = 2 \ln |x|$ are acelaşi **coeficient unghiular.**

În graficul din figura VI-188 sînt trasate toate curbele corespunzătoare,

Fig. VI — 188



189. Fie (C_m) curba reprezentativă a funcţiei $y = f(x) = x + \dfrac{m}{x-1}$, unde m este o constantă dată. Se cere:

1° Să se studieze variaţia lui y pentru $m = 4$ şi să se construiască curba (C_4) corespunzătoare. Să se determine cele două asimptote ale acestei curbe şi să se arate că punctul lor de intersecţie I este centrul de simetrie a lui (C_4).

2° Pentru ce valori ale lui m această funcţie admite un maxim şi un minim?

3° Se intersectează curba (C_4) cu o dreaptă (D) paralelă la $x'x$ şi de ecuaţie $y = a$. Cîte puncte de intersecţie se obţin? Între ce limite trebuie să fie cuprins a pentru ca aceste puncte să existe?

4° Dreapta (D) taie curba (C_m) în general în două puncte A şi B; să se găsească coordonatele mijlocului segmentului AB pe care l-am notat cu M şi să se deducă locul geometric al punctului M variabil. Să se indice două puncte remarcabile ale acestui loc.

5° Se dă funcţia $y = (x^2 + 2x - 5)/2$. Să se traseze curba (C') a acestei funcţii folosind sistemul de axe de la curba (C_4) şi să se arate că curba (C') trece prin punctele care corespund maximului şi minimului primei funcţii.

R. 1° Graficul curbei (C_4) este dat în figura VI-189, centrul de simetrie este în $I\,(1, 1)$. Într-adevăr, se verifică uşor că $\frac{1}{2}[f(1 + \alpha) + f(1 - \alpha)] = 1$, unde $1 + \alpha$ şi $1 - \alpha$ sînt abscisele a două puncte simetrice faţă de I_1.

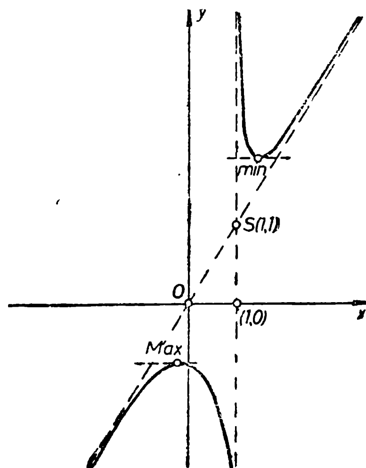


Fig. VI — 189

2° $m < 0$ şi $m \neq 1$.

3° Abscisele punctelor de intersecţie (două) sînt date de ecuaţia $x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$. Pentru ca punctele respective să existe trebuie ca $a \in (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$. Locul este dreapta $2x - y - 1 = 0$ care trece prin punctele de extrem ale curbei (C_4).

5° Curba (C') este o parabolă cu minimul în $(-1, -3)$ şi trece prin punctul $(3, 5)$.

190. 1° Să se studieze variaţia funcţiilor $y_a(x) = \frac{xe^x}{e^x - a}$, $a \neq 0$, considerîndu-se cazurile $a < 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.

2° Să se arate că pentru oricare din curbele reprezentative (C_a) ale funcţiilor de la 1°, avem o asimptotă $(D_a$ fixă neparalelă cu Oy. Să se precizeze poziţia acestei asimptote faţă de (C_a).

3° Să se verifice că punctele de pe (C_a) în care se pot duce tangente paralele cu Ox sînt situate pe o dreaptă care nu depinde de a.

4° Să se discute existenţa punctelor de pe curbele (C_a) în care se pot duce tangente paralele cu (D) şi să se arate că aceste puncte aparţin unei alte drepte (D_2).

5° Să se arate că abscisele punctelor aparţinînd curbelor (C_a), în care $y'''(x) = 0$, sînt rădăcinile (diferite de zero), ale ecuaţiei $e^x(2 - x) - a(2 + x) = 0$.

6° Să se discute apoi această ecuaţie.

7° Să se verifice apoi că punctele de inflexiune ale curbelor (C_a) sînt, pentru $a \neq 1$, situate pe o dreaptă (D_a).

8° Să se precizeze diferite forme ale curbelor (C_a) după valorile lui a.

R. 1° Funcţia $y_a(x)$ este definită pentru orice x, dacă $a < 0$ şi pentru orice $x \neq \ln a$, dacă $a > 0$.

Derivata $y_a'(x) = e^x \frac{e^x - a(x + 1)}{(e^x - a)^2}$ (rădăcinile lui y' rezultînd din intersecţia graficelor corespunzătoare funcţiilor $y = \frac{e^x}{x + 1}$ şi $y = a$).

Rezultă următoarele tablouri:

pentru $a < 0$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
y	0	↘	min	↗ 0		↗	$+\infty$

pentru $0 < a < 1$

x	$-\infty$		$\ln a$			0		$+\infty$
y'	$+$	$+$		$+$	$+$		$+$	
y	0 ↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

pentru $a = 1$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
y'		+	+	0	+	+	
y	0		$\nearrow$	1	$\nearrow$		$+\infty$

pentru $a > 1$

x	$-\infty$		α			0			$\ln a$			β		$+\infty$
y'		+	0		−		−			−		0	+	
y	0	$\nearrow$	max	$\searrow$		0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$		min	$\nearrow$	$+\infty$

α şi β fiind rădăcinile ecuaţiei $y'(x) = 0$.

2° Avem $y_a(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - a} = x + \dfrac{a}{e^x - a}$ şi deci

$\lim\limits_{x\to\infty} [y_a(x) - x] = 0$, de unde rezultă că dreapta $(D): y = x$ este asimptotă la curbele (C_a), acestea fiind situate deasupra acestei asimptote, cînd $a > 0$.

3° Punctele unei tangente paralele cu Ox se găsesc pe o curbă ce se determină eliminînd pe a între ecuaţiile:

$$e^x - a(x + 1) = 0,\quad y = \frac{xe^x}{e^x - a}.$$

Eliminarea lui a dă $y = x + 1$, adică o dreaptă (D_1) paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

4° Punctele unei tangente paralelă cu dreapta (D) sînt date de $y_a(x) = 1$, adică $e^x(1 - x) = a$. Fie $v(x) = e^x(1 - x)$, de unde $v'(x) = -xe^x$ şi tabloul:

x	$-\infty$			0			$+\infty$
v'		+	+	0	−	−	
v	0		$\nearrow$	1	$\searrow$		$-\infty$

şi din graficul funcţiei $v(x)$ fig. VI-190 se deduce existenţa punctelor cerute şi anume;
pentru $a < 0$: un punct de abscisă pozitivă;
$0 < a < 1$: două puncte cu abscise de semn contrar;
$a > 1$: nici un punct.

Eliminarea lui a între $e^x(1-x) = a$ și $y = \frac{xe^x}{e^x - a}$, dă $y = 1$ ecuația dreptei (D_2) care conține punctele considerate.

5° Avem $y_a''(x) = \frac{ae^x[(x-a)e^x + a(x+2)]}{(e^x - a)^3}$;

punem $w(x) = e^x \frac{2-x}{2+x}$ de unde $w' = \frac{-x^2e^x}{(2+x)^2}$ rezultînd tabloul:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
w'		$-$	|	$-$	0	$-$	
w	0	↘ $-\infty$	|	$+\infty$ ↘	1	↘	$-\infty$

Într-un punct de inflexiune al curbelor (C_a), $y_a''(x)$ se anulează schimbînd de semn, aceste puncte sînt date de rădăcinile simple ale ecuației $\omega(x) - a = 0$, $(e^x \neq a)$.

Graficul lui $w(x)$ permite să se precizeze că, dacă:

$a < 0$, avem două puncte de inflexiune;

$a > 0$ $(a \neq 1)$, avem un punct de inflexiune;

$a = 1$, soluția $x = 0$ se elimină, căci anulează pe $(e^x - a)$.

Eliminarea lui a între ecuațiile $(x-2)e^x + a(x+2) = 0$ și $y = \frac{xe^x}{e^x - a}$, conduce la obținerea ecuației $y = \frac{x}{2} + 1$, care reprezintă tocmai dreapta (D_3) ce conține toate punctele de inflexiune.

8° Curbele (C_a) sînt reprezentate în figura VI-190.

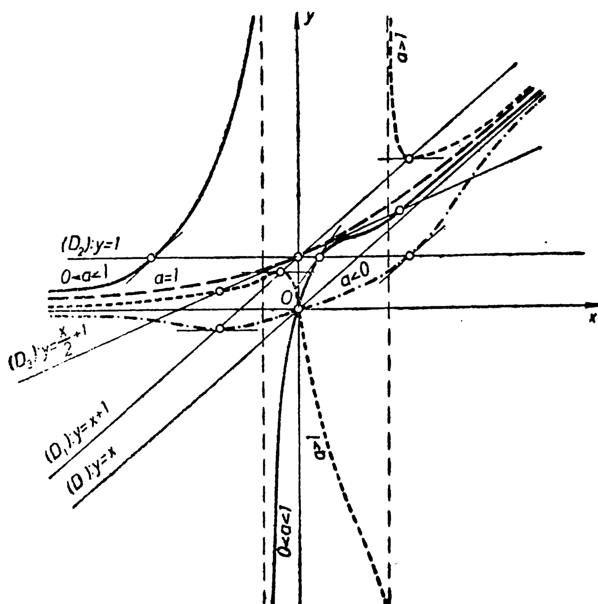


Fig. VI — 190

191. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}, \text{ pentru } x \in R \text{ și } n \geqslant 2.$$

R. Se vor lua în considerare $n = 2k$ și $n = 2k + 1$, unde $k \in Z_+^*$, graficele corespunzătoare fiind date în figura VI-191, *a* și *b*.

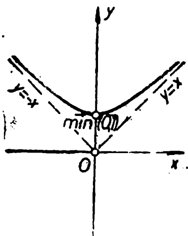


Fig. VI — 191, *a*

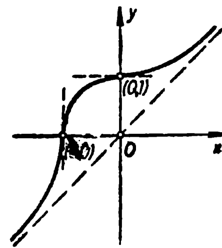


Fig. VI — 191, *b*

192. Să se studieze și să se reprezinte grafic $f(x) = (x^n - a^n)e^{|x-a|}$ unde $a > 0$ și $n \in N$.

R. Se vor studia cazurile $n = 2k$ și $n = 2k + 1$, graficele corespunzătoare fiind date în figura VI-192, *a* și *b*.

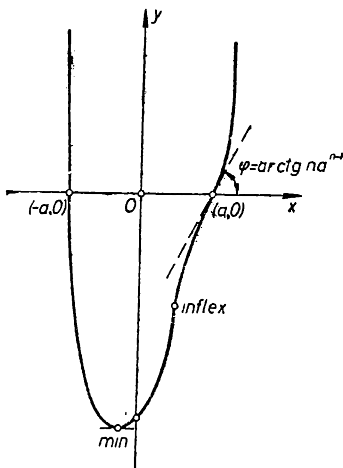


Fig. VI — 192, *a*

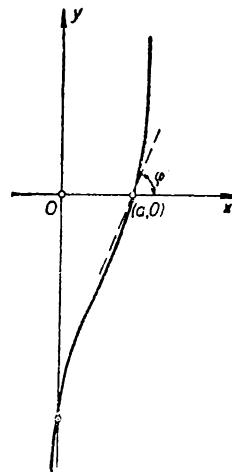


Fig. VI — 192, *b*

193. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcțiile

$$f(x) = x^3 - k \ln x \text{ și}$$

$$g(x) = x^3 + k \ln x$$

unde k este un parametru real.

R. Graficele celor două funcții, pentru unele valori mai importante ale lui k sînt date în figura VI-193, *a* și *b*.

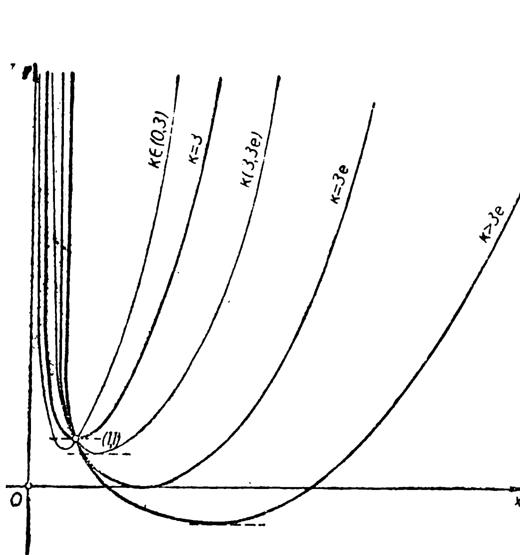


Fig VI — 193, *a*

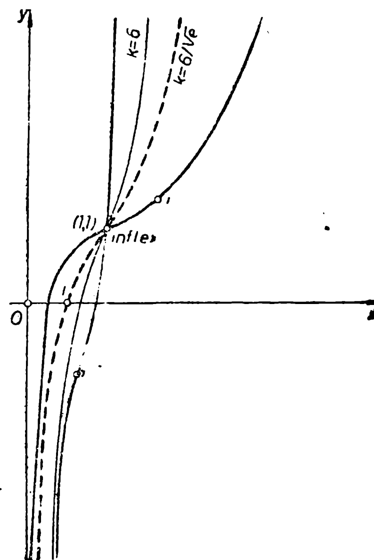


Fig. VI — 193, *b*

194. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = \frac{x \ln x}{\ln x - k},$$

unde k este un parametru real.

R. Se pot lua în considerare următoarele valori particulare pentru $k : k \in (-\infty, -4)$, $k \in [-4, 0)$, $k \in (0, \infty)$, corespunzător acestor valori rezultă tabelele de variaţie:

$k \in (-\infty, -4)$

x	0		e^k		$e^{\frac{k-\alpha}{2}}$		e^{k+2}		$e^{\frac{k+\alpha}{2}}$		1		∞
$f'(x)$		+ +	‖ +	+	0	− −	−	− − −	0	+	+	+ +	+
$f(x)$	0	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	max	↘		↘	min	↗	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$		+ +	‖ −	−	−	− −	0	+ +	+	+	+	+	

unde $\alpha = \sqrt{k^2 + 4k}$

$k \in (-4, 0)$

x	0		e^k		e^{k+2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	+ +	‖ +	+ +	+	+ +	+	+ +	+
$f(x)$	0	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗		↗	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$	+	+ +	‖ −	− −	0	+ +	+	+ +	+

$k \in (0, \infty)$

x	0		$e^{\frac{k-\alpha}{2}}$		1			e^k			$e^{\frac{k+\alpha}{2}}$			e^{k+2}		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	min		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

$k = -4$

x	0			e^{-4}				e^{-2}			1		∞
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$			$\nearrow$			0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

graficele corespunzătoare fiind date în figura VI-194, *a*, *b*, *c*, *d*.

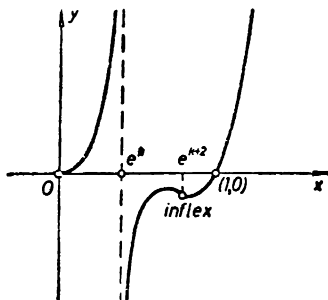


Fig. VI — 194, *a*

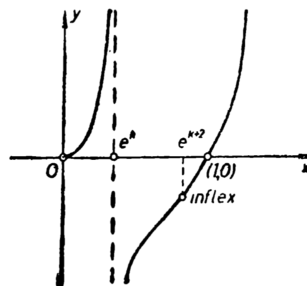


Fig. VI — 194, *b*

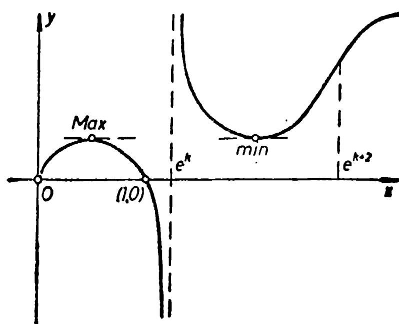


Fig. VI — 194, *c*

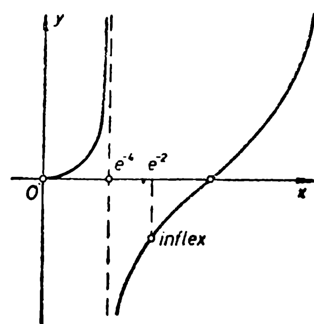


Fig. VI — 194, *d*

195. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = x \ln ax + x^2,$$

unde a este un parametru real.

R. Pentru $a > 0$, avem tabloul de variaţie:

x	0		x'		x_1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	min	↗	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$		$+$	$+$	$+$

graficul fiind dat în figura VI 195.

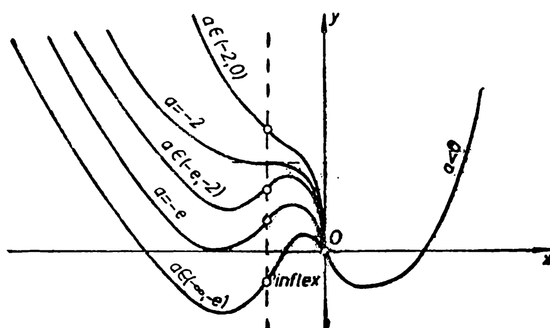


Fig. VI — 195

Pentru $a < 0$, rezultă ca necesar de studiat următoarele cazuri:

$a \in (-\infty, -e)$, cu tabloul de variaţie

x	$-\infty$		x_1		x_1'		$-1/2$		x_2		x_2'		0
$f'(x)$	$-$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		0	$-$	$-$
$f(x)$	∞	↘	0	↘	min		↗	↗	0	↗	max	↘	0
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$		$+$	0	$-$	$-$		$-$		$-$

$= -e$, cu tabloul de variaţie

x	$-\infty$			-1			$-1/2$		x_1'			0
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$		0			$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$		0
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$			$+$	0	$-$		$-$		$-$

$\in (-e, -2)$, cu tabloul de variaţie

x	$-\infty$		x_1'		$-1/2$			x_2'		0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min		$\nearrow$	$\nearrow$		max		$\searrow$
$f''(x)$	$+$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$

$= -2$, cu tabloul de variaţie

x	$-\infty$			$-1/2$				0
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$				$\searrow$		0
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$

$\in (-2, 0)$, cu tabloul de variaţie

x	$-\infty$			$-1/2$			0
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	∞		$\searrow$	$\searrow$		$\searrow$	0
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$

raficele corespunzătoare diferitelor valori ale parametrului a, sînt date în figura VI-195.

196. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = x \ln x + ax^2,$$

unde a este un parametru real.

R. Se vor lua în considerare următoarele cazuri:
$a > 0$, cu tabloul de variație

x	0		x_1'		x_1			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	

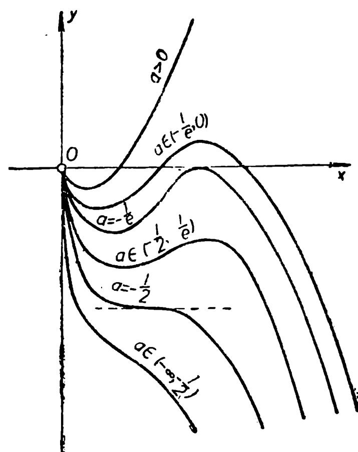


Fig. VI — 196

$a \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, cu tabloul de variație

x	0		$-1/2a$			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$		$-$		$-$
$f(x)$	0	$\searrow$			$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

$a = -\dfrac{1}{2}$, cu tabloul de variație

x	0			1			
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$		$-1/2$		$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0		$-$	$-$

$a \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e}\right)$, cu tabloul de variaţie

x	0		x_1'		$-\frac{1}{2a}$		x_2'		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	min		$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	$-$

$a = -\frac{1}{e}$, cu tabloul de variaţie

x	0		x_1'		$\frac{e}{2}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$	0	$-$		$-$	$-$

$a \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, cu tabloul de variaţie

x	0		x_1'		x_1		$-\frac{1}{2a}$		x_2'		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		0	$-$	$-$		$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\nearrow$			max	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$		$-$	$-$		$-$

graficele corespunzătoare cazurilor de mai înainte fiind date în figura VI-196.

197. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{k}{x}$, unde k este un parametru real şi se cere:

1° Să se traseze curbele particulare C_{-1}, C_0, C_1 corespunzătoare valorilor particulare ale parametrului k şi anume: $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$.

2° Pe curba C_k, corespunzătoare unui k oarecare, se consideră patru puncte: P_k punctul în care curba C_k intersectează axa xx'; T_k punctul de contact al unei tangente dusă prin O la curba C_k; M_k punctul de pe curbă în care tangenta la C_k este paralelă cu axa xx'; I_k punctul de inflexiune de pe C_k. Să se arate că abscisele acestor puncte sînt în progresie geometrică.

R. 1° Tablourile de variaţie pentru cazurile particulare sînt:

$k = -1$

x	0		1		e		e^2		$e^{5/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$		0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	e^{-2}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{5}{2}}$	↘	0
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$				0	$+$	$+$

$k = 0$

x	0		1		e		$e^{\frac{3}{2}}$			$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		$+$		0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	e^{-1}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	↘	0
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$

$k = 1$

x			e^{-1}		1		$\sqrt{e}$			∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$		0	$-$	$-$		$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	$\frac{3}{2\sqrt{e}}$	↘		0
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	$+$

graficele corespunzătoare fiind date în figura VI-197.

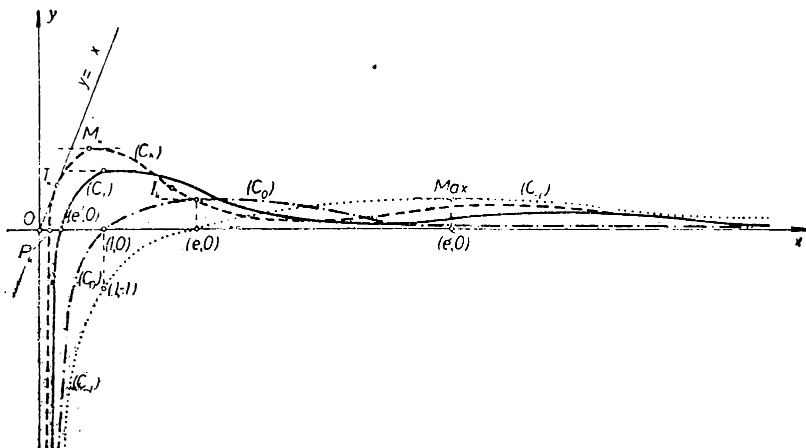


Fig VI — 197

2° Abscisele punctelor respective sînt $x_P = e^{-k}$, $x_T = e^{\frac{1}{2}-k}$, $x_M = e^{1-k}$, $x_I = e^{\frac{3}{2}-k}$ observîndu-se că acestea formează o progresie geometrică cu rația $e^{\frac{1}{2}}$.

Capitolul VII

Integrale

I. Integrale nedefinite

a. Probleme ce conduc la noțiunea de integrală și integrarea imediată a funcțiilor

1. Folosind sumele *Riemann* să se calculeze ariile limitate de graficele funcțiilor următoare, de axa xx' și de dreptele specificate în dreptul fiecăreia:

$f_1(x) = 2x^2 + 1,$ $\quad x = 0$ și $x = 5.$

$f_2(x) = x^3 + 2x - 3,$ $\quad x = 1$ și $x = 7.$

$f_3(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 5}{x^2 + 1},$ $\quad x = 6$ și $x = 16.$

$f_4(x) = \sqrt{x - 1},$ $\quad x = 1$ și $x = 5.$

$f_5(x) = e^{x+2},$ $\quad x = 1$ și $x = 9.$

$f_6(x) = \ln(x^2 - x + 1),$ $\quad x = 3$ și $x = 7.$

$f_7(x) = \sin x,$ $\quad x = 0$ și $x = \dfrac{\pi}{4}.$

$f_8(x) = \operatorname{tg} x,$ $\quad x = 0$ și $x = \dfrac{\pi}{3}.$

2. Folosind definiția primitivelor și tabelul integralelor nedefinite, să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

$I_1 = \int (2x^3 - 5x + 4)\,dx,$ $\qquad$ R. $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x$

$I_2 = \int \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 dx,$ $\qquad$ R. $\dfrac{x^5}{5} + 2x - \dfrac{1}{3x^3}.$

$I_3 = \int \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,$ $\qquad$ R. $\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}.$

$I_4 = \int \dfrac{15x^2 + 1}{5x^3 + x + 4}\,dx,$ $\qquad$ R. $\ln(5x^3 + x + 4).$

$I_5 = \int \dfrac{e^x}{5 + e^x}\,dx,$ $\qquad$ R. $\ln(5 + e^x).$

$I_6 = \int \dfrac{3x - 1}{3x^2 - 2x + 51}\,dx,$ $\qquad$ R. $\ln\sqrt{3x^2 - 2x + 51}.$

3. Folosind o substituţie convenabilă, să se calculeze următoarele integrale:

$I_1 = \int (2x-1)^5 dx,$ $\quad I_2 = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx,$

$I_3 = \int \sqrt{2x+5}\, dx,$ $\quad I_4 = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx,$

$I_5 = \int \frac{\sin x}{a + b\cos x} dx,$ $\quad I_6 = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$

$I_7 = \int \frac{dx}{x(1+\ln x)^3},$ $\quad I_8 = \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx,$

$I_9 = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx,$ $\quad I_{10} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$

R În I_1 se notează $2x-1=t$, $2dx = dt$ şi se obţine $\frac{1}{12}(2x-1)^6$; în I_2 se notează $\operatorname{tg} x = t$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, se obţine $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$; în I_3 se ia $2x+5=t$, $2dx = dt$, se obţine $\frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$, în I_4 se ia $e^x = t$, $e^x dx = dt$ se obţine arc $\operatorname{tg} e^x$. În continuare, rezultatele sînt: $I_5 = -\frac{1}{b}\ln|a+b\cos x|$, $I_6 = \operatorname{arctg}(\sin x)$, $I_7 = -\frac{1}{2(1+\ln x)^2}$, $I_8 =$ $= -\ln(1+\cos^2 x)$, $I_9 = \sin(\ln|x|)$, $I_{10} = 2\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Aceeaşi chestiune pentru integralele:

4. $I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}},$ $\quad I_2 = \int x^2\sqrt{1+x^3}\, dx,$

$I_3 = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx,$ $\quad I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}},$

$I_5 = \int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 2x} dx.$ $\quad I_6 = \int \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{x+\sin x} dx.$

R. Pentru I_1 se poate nota $\ln|x| = t$ şi se obţine $I_1 = \arcsin(\ln|x|)$; $I_2 = \frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}$; pentru I_3 se poate nota $\cos x = t$; $I_4 = 2\operatorname{tg}\sqrt{x}$; $I_5 = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(\cos 2x)$; I_6; se poate nota $x + \sin x = t \Rightarrow (1+\cos x)dx = dt$ sau $2\cos^2\frac{x}{2}dx = dt$ etc.

5. $I_1 = \int \frac{x^2\, dx}{8-x^3},$ $\quad I_2 = \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}},$ $\quad I_3 = \int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx.$

R. Pentru I_1 se observă că $d(8-x^3) = -3x^2dx$; astfel fiind, putem scrie $I_1 = -$ $= -\frac{1}{3}\int \frac{d(8-x^3)}{8-x^3}$ şi notînd $8-x^3 = t \Rightarrow -3x^2dx = dt$, rezultă $I_1 = -\frac{1}{3}\ln|8-x^3|$.

Pentru I_2 se poate nota $-\sqrt{x} = t \Rightarrow -\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$ şi integrala devine $I_2 = -\int 2\sqrt{t}\, dt =$ $= -\frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}.$

Pentru I_3 se observă că $d(x + \sin x) = (1 + \cos x)dx$, astfel încît se poate face substituția $x + \sin x = t$.

6. $I_1 = \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, $I_2 = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$, $I_3 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$,

$I_4 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $I_5 = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\,dx$, $I_6 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

R. Pentru I_1 se dezvoltă și apoi se integrează fiecare termen; rezultă $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$. Pentru I_2, procedeu asemănător. La I_3 se observă că $2x\,dx$ este diferențiala lui x^2; astfel încît putem face substituția $x^2 = t$, rezultînd $I_3 = \frac{1}{2}\arcsin x^2$. La I_4 se notează $1 + x^2 = t^2$ iar pentru I_5 se poate lua $x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x + 1)dx = dt$. Pentru I_6 se ia $\sqrt{x} = t$ și se obține $I_6 = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}$.

7. $I_1 = \int (2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x + 1}\,dx$; $I_2 = \int \frac{x^5\,dx}{(2 + x^2)^3}$;

$I_3 = \int e^{\sin x}\cos x\,dx$; $I_4 = \int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$.

R. I_1: se notează $x^2 + 3x + 1 = t^2 \Rightarrow (2x + 3)dx = 2t\,dt$. Pentru I_2 se notează $2 + x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$, $x^4 = (t - 2)^2$; rezultă $I_2 = \frac{1}{2}\ln(2 + x^2) + \frac{2}{2 + x^2} - \frac{1}{(2 + x^2)^2}$. La I_3 se notează $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$, iar pentru I_4 se observă că putem scrie

$$I_4 = (1 - \sin^2 x)\sin^2 x\,d(\sin x), \text{ rezultînd } \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}.$$

8. $I_1 = \int \frac{\cos\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{x}{2}}}$; $I_2 = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$; $I_3 = \int \frac{\sin 6x\,dx}{4 + \sin^4 3x}$;

$$I_4 = \int \frac{dx}{x(1 + \ln|x|)^3}.$$

R. I_1 : se poate nota $2\sin\frac{x}{2} = t$;

$I_2 = \arcsin(2\sin x - 1)$, $I_3 = \frac{1}{6}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sin^2 3x}{2}$; $I_4 = -\frac{1}{2(1 + \ln|x|)^2}$.

9. $I_1 = \int \frac{dx}{x(ax^n + b)}$, $I_2 = \int \frac{\sqrt[3]{x - x^3}}{x^4}\,dx$, $I_3 = \int \frac{e^x\,dx}{(3 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}$,

$I_4 = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 1}}$, $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $I_6 = \int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{3 + \sin 2x}$,

$I_7 = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$, $I_8 = \int \frac{x^2\,dx}{a^6 - x^6}$, $I_9 = \int \frac{\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $I_{10} = \int x^2\sqrt{a + x}\,dx$.

R. Pentru I_1 şi I_2 se poate lua $\frac{1}{x} = t$; la I_3 se poate lua $\sqrt{e^x - 1} = t$. I_4: se ia $\sqrt{2x-1} = t$; I_5: se ia $a - x = t$; I_6: se ia $\sin x - \cos x = t$; I_7: se ia $\sqrt{x^3} = t$ şi rezultă $I_7 = \frac{2}{3} \arcsin \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$; I_8: se ia $x^3 = t$ şi se obţine $I_8 = \frac{1}{6a^3} \ln \frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3}$; I_9: se ia $x = a\sin^2 t$, rezultînd $I_9 = \sqrt{x(a-x)} + a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}$; pentru I_{10} se notează $a + x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$ şi rezultă $I_{10} = \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{4ax}{5} + \frac{8a^2}{15}\right)$.

b. Integrarea prin părţi

Să se calculeze integralele:

10. $I = \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx,\ x \in R_+^*$.

R. Se integrează prin părţi folosind formula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$; în cazul de faţă se ia: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ şi $dv = \frac{dx}{x^3} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$ şi deci

$$I = -\frac{1}{2x^2}\ln x + \int \frac{1}{2x^2}\,\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2}.$$

11. $I_1 = \int x \cos x\,dx, \qquad I_2 = \int x \sin x\,dx.$

R. Pentru I_1 se ia $x = u \Rightarrow dx = du$ şi $\cos x\,dx = dv \Rightarrow v = \sin x$, rezultînd $I_1 = x\sin x + \cos x$.

Pentru I_2 se ia $x = u \Rightarrow dx = du$ şi $\sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x$, rezultînd $I_2 = -x\cos x + \sin x$.

12. $I_1 = \int x \ln x\,dx, \qquad I_2 = \int x^p \ln x,\ x \in R_+^*$ şi $p \in R \setminus \{-1\}$.

R. Se va ţine seamă că $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$; pentru I_1 se poate face substituţia $x = u \Rightarrow dx = du$ şi $\ln x\,dx = dv \Rightarrow v = x\ln x - x$, avem deci $I_1 = x(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)dx$ sau, $2I_1 = x(x\ln x - x) + \frac{x^2}{2}$, de unde rezultă că

$$I_1 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Pentru I_2 procedeu asemănător, rezultînd $I_2 \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$.

13. $I_1 = \int \cos x \ln(1 + \cos x)dx,\ I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

R. Pentru I_1 se ia $\cos x\,dx = du \Rightarrow u = -\sin x$ și $v = \ln(1+\cos x) \Rightarrow dv = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; rezultă $I_1 = \sin x \ln(1+\cos x) + x - \sin x$. Pentru cea de-a doua integrală avem $I_2 = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$. dar $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\int \dfrac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + a^2 \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = I_2 + a^2 \arcsin \dfrac{x}{a}$ și în consecință $I_2 = \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{1}{2}a^2 \arcsin \dfrac{x}{a}$.

• **14.** $I_1 = \int \arcsin x\,dx$, $I_2 = \int \operatorname{arctg} x\,dx$, $I_3 = \int x \operatorname{arctg} x\,dx$, $I_4 = \int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$, $I_5 = \int x\,\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

R. Pentru I_1 se notează $\arcsin x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$ și $dx = dv \Rightarrow x = v$ avem deci $I_1 = x \arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ I_2: procedeu asemănător obținându-se $x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$. Pentru I_3 se ține seamă de I_2, luîndu-se $\operatorname{arctg} x\,dx = du \Rightarrow u = I_2$ și $x = v \Rightarrow dx = dv$, obținîndu-se $I_3 = \dfrac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}x$, $I_4 = \dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{6}\ln(x^2+1)$, $I_5 = x\,\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \dfrac{x^2}{2}$.

15. $I_1 = \int x^2 \cos x\,dx$, $I_2 = \int x^2 \cos 2x\,dx$,
$I_3 = \int x^2 \sin x\,dx$ $I_4 = \int x^2 \sin 2x\,dx$.

R. Pentru I_1 se integrează prin părți de două ori, obținîndu-se $I_1 = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.
$I_2 = \dfrac{x^2}{2}\sin 2x + \dfrac{x}{2}\cos 2x - \dfrac{1}{4}\sin 2x$. Pentru I_3 și I_4, prin părți, cu rezultate asemănătoare.

16. $I_1 = \int \sin x \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)dx$, $I_2 = \int \dfrac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

R. Se observă că putem scrie $I_1 = \int \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) d(\cos x)$ și notînd $\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) = u \Rightarrow$ $\Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sin x}$ $d(\cos x) = dv \Rightarrow v = \cos x$, aplicînd metoda de integrare prin părți se obține $I_1 = -\cos x \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \ln|\sin x|$. Apoi $I_2 = \int \ln x\, d\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ și sub această formă integrăm prin părți luînd: $\ln x = u \Rightarrow dx = x\,du$, $d\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = dv \Rightarrow v = \dfrac{x}{1+x^2}$ și în final rezultă $I_2 = \dfrac{x \ln|x|}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

17. $I_1 = \int e^{2x} \sin^2 x\,dx$, $I_2 = \int e^{2x} \cos^2 x\,dx$.
$I_3 = \int e^{\arcsin x}\,dx$, $I_4 = \int e^{-x} \cos^3 x\,dx$.

R I_1 și I_2 se calculează asociat observînd că $I_1 + I_2 = \int e^{2x}\,dx = \dfrac{1}{2}e^{2x}$ și că $I_1 - I_2 = -\int e^{2x} \cos 2x\,dx = -\dfrac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$. I_3 și I_4 se calculează prin părți obținîndu-se $I_3 = \dfrac{1}{2}e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$ și $I_4 = \dfrac{e^{-x}}{40}(3\sin 3x - \cos 3x) + \dfrac{3e^{-x}}{8}(\sin x - \cos x)$.

18. $I_1 = \int e^x \sin x\, dx$, $\quad I_2 = \int e^x \cos x\, dx$,
$I_3 = \int e^x \sin^2 x\, dx$, $\quad I_4 = \int e^x \cos^2 x\, dx$,
$I_5 = \int e^{ax} \sin bx\, dx$, $\quad I_6 = \int e^{ax} \cos bx\, dx$.

R. I_1 se integrează prin părţi de două ori: notînd $\sin x = u \Rightarrow \cos x = du$ şi $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$; avem: $I_1 = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$ (1). Calculăm tot prin părţi integrala din (1), notînd $\cos x = u \Rightarrow -\sin x\, dx = du$ şi $e^x dx = dv \Rightarrow e^x = v$; avem: $\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$ sau, folosind notaţiile din enunţ: $I_2 = e^x \cos x + I_1$, (2).

Revenind la (1) rezultă: $I_1 = e^x \sin x - e^x \cos x - I_1$ sau $I_1 = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x)$, iar $I_2 = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x)$.

Pentru I_3 şi I_4, se observă că $I_3 + I_4 = \int e^x dx = e^x$ şi $I_3 - I_4 = -\int e^x \cos 2x\, dx$, această ultimă integrală calculîndu-se ca I_2.

I_5 şi I_6 se calculează tot prin părţi, asemănător cu I_1 şi I_2, obţinîndu-se:

$$I_5 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}, \quad I_6 = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

19. $I_1 = \int x^2 e^{-x} dx$, $\quad I_2 = \int x^2 e^{2x} dx$,
$I_3 = \int (x^3 + 5x^2 - 2) e^{2x} dx$, $\quad I_4 = \int x^3 e^{2x} dx$, $I_5 = \int x e^{\sqrt{x}} dx$.

R. I_1 se calculează prin părţi, notîndu-se $x^2 = u \Rightarrow 2x\, dx = du$ şi $e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = -e^{-x}$; rezultă $I_1 = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$, (1). Apoi se calculează prin părţi integrala din membrul al doilea din (1), rezultînd în final $I_1 = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$.

I_2 se calculează asemănător cu I_1 obţinîndu-se $I_2 = \frac{1}{4} e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)$. Metoda de integrare folosită pentru I_1 şi I_2 se aplică la toate integralele de forma $e^{ax}P(x)\, dx$, unde $P(x)$ este un polinom de un grad oarecare. Se observă însă că, în ambele cazuri de mai sus, rezultatele integrării sînt de forma $e^{ax} Q(x)$ unde $Q(x)$ este un polinom de acelaşi grad cu $P(x)$. În continuare, vom utiliza rezultatele de mai sus, determinînd direct pe $Q(x)$ prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Astfel fiind, rezultatul integrării lui I_3 va fi de forma $e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ (2). Derivînd în (2) şi identificînd cu I_3 rezultă $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{4}$, $c = -\frac{7}{4}$, $d = -\frac{1}{8}$.

Calculul integralelor I_4 şi I_5 se face după aceeaşi metodă, rezultînd

$$I_4 = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right) e^{2x} \text{ şi } I_5 = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)\, e^{\sqrt{x}}.$$

20. $I = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} dx$.

R. Se face schimbarea de variabilă $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ şi integrala dată se transformă în $I = \int t \cos t\, dt$, aceasta calculîndu-se prin părţi; se obţine $I = t \sin t + \cos t$ etc.

c. Integrarea prin relaţii de recurenţă

Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru calculul integralei

21. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a)^n}$.

R. Se integrează prin părţi notînd $\frac{1}{(x^2+a)^n} = u \Rightarrow \frac{-2xn\,dx}{(x^2+a)^{n+1}} = du$ şi $v = x \Rightarrow dv = dx$, rezultînd

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx. \quad (1)$$

Notînd cu J integrala din membrul al doilea din (1), aceasta se calculează astfel:

$$J = 2n\int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = 2n\,I_n - 2an\,I_{n+1}, \quad (2)$$

din (1) şi (2) rezultă $I_{n+1} = \frac{1}{a}\left[\frac{x}{2n(x^2+a)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n\right]$ şi înlocuind pe n cu $n-1$, avem în final

$$I_n = \frac{1}{a}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}\right],$$

aceasta fiind relaţia de recurenţă cerută

22. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru calculul integralei

$$I_n = \int x^n e^{ax}dx,\ n \in N.$$

R. Se integrează prin părţi, notînd $x^n = u \Rightarrow nx^{n-1} = du$ şi $dv = e^{ax} \Rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax}$; rezultă imediat

$$I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1},$$

aceasta fiind relaţia de recurenţă pentru calculul din aproape în aproape a integralei din enunţ.

23. Să se stabilească relaţiile de recurenţă pentru calculul integralelor:

$$I_n = \int \sin^n x\,dx, \quad J_n = \int \cos^n x\,dx.$$

R. Pentru I_n se observă că putem scrie $I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx$, această integrală se calculează prin părţi notînd $\sin^{n-1} x = u \Rightarrow (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx = du$ şi $\sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x$.

Avem deci $I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, de unde rezultă imediat $I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Asemănător avem şi $J_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

Relaţiile de recurenţă stabilite mai înainte sînt valabile şi pentru cazul cînd $n \in Z$. Astfel avem:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2} x} \text{ şi } \int\frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

24. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int \cos^5 x\,dx,\quad I_2 = \int \sin^6 x\,dx,\quad I_3 = \int(\cos x + \sin x)^5 dx,$$

$$I_4 = \int\frac{dx}{\cos^3 x},\quad I_5 = \int\frac{dx}{\sin^4 x},\quad I_6 = \int\frac{dx}{\cos^6 x}.$$

R. Se aplică rezultatele obținute la exercițiul anterior;

avem: $I_1 = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4 \sin x \cos^2 x}{15} + \frac{8 \sin x}{15}$;

$$I_2 = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5 \sin^3 x \cos x}{24} + \frac{5}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right);$$

$$I_3 = \sin x - \cos x + \frac{8}{3}(\sin^3 x - \cos^3 x) - \frac{4}{5}(\sin^5 x - \cos^5 x);$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right];$$

$$I_5 = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x;$$

$$I_6 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

25. Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul integralei

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

R. Se pot stabili două relații de recurență una pentru calculul integralei prin micșorarea gradului funcției sinus și alta pentru funcția cosinus.

Pentru primul caz, putem scrie:

$I_{m,n} = \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, dx$, această integrală calculîndu-se prin părți, se notează $\sin^{m-1} x = u \Rightarrow (m-1)\sin^{m-2} x \cos x \, dx = du$ și $\cos^n x \sin x \, dx = dv \Rightarrow v = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$; se înlocuiesc aceste relații în formula de integrare prin părți și rezultă în final

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}.$$

Asemănător obținem o relație de recurență prin care se scade gradul funcției cosinus

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

Observația 1. În relațiile de recurență obținute, dacă se face $n = 0$ și apoi $m = 0$ se obțin rezultatele de la exercițiul 23.

Observația 2. Dacă $n = 2p + 1$, avem

$I_{m,n} = \int \sin^m x(1 - \sin^2 x)^p \cos x \, dx$ și avem de integrat un polinom generalizat în $\sin x$. La fel pentru $\cos x$, cînd $m = 2p + 1$. Scriind $I_{m,n} = \int \cos^{m+n} x \operatorname{tg}^m x \, dx$ și notînd $\operatorname{tg} x = t$, rezultă integrala $I_{m,n} = \int (1 + t^2)^{p-1} t^m \, dt$ (în care am notat $m + n = -2p$), care se poate calcula ca un polinom generalizat în $\operatorname{tg} x$.

Dacă $m + n$ este par (dar nu prea mare), se recomandă aceeași schimbare de variabilă $\operatorname{tg} x = t$.

În fine, dacă m și n sînt pozitivi și de ordin par, se exprimă $\sin^{2p} x$ și $\cos^{2q} x$ în funcții trigonometrice de arce multiple, revenind la calculul unei integrale de forma $\int \cos rx \sin tx \, dx$, cunoscută.

Dacă în integrala generală $I_{m,n}$ se face $m = -n$, se obține integralele: $I'_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx$ și $I''_n = \int \operatorname{ctg}^n x \, dx$, cu $n \neq 1$. Pentru aceste două integrale se stabilesc ușor relațiile de recurență:

$$I'_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I'_{n-2} \text{ și } I''_n = \frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - I''_{n-2}.$$

26. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx, \quad I_2 = \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx, \quad I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx,$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}, \quad I_5 = \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}, \quad I_6 = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x},$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}, \quad I_8 = \int \operatorname{tg}^3 x \, dx, \quad I_9 = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x}, \quad I_{10} = \int \operatorname{ctg}^7 x \, dx.$$

R. Se aplică relațiile de recurență stabilite la exercițiul 25, obținîndu-se rezultatele:

$$I_1 = \frac{\sin^3 x \cos^3 x}{6} + \frac{\sin^3 x \cos x}{8} + \frac{x}{16} - \frac{\sin 2x}{32};$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x. \quad I_3 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right|.$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x|; \quad I_5 = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$I_6 = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; în I_7 avem $m = -\frac{3}{2}$ și $n = -\frac{5}{2}$ și rezultă

$$I_7 = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,(\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x); \quad I_8 = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|;$$

$$I_9 = -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x; \quad I_{10} = -\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6} + \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x|.$$

27. Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul integralelor:

$$I_n = \int x^n \cos ax \, dx, \quad J_n = \int x^n \sin ax \, dx.$$

R. I_n se integrează prin părți notînd $x^n = u \Rightarrow nx^{n-1}dx = du$ și $\cos ax \, dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{a}\sin ax$, rezultă

$$I_n = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax \, dx \tag{1}$$

și integrînd din nou prin părți integrala din membrul al doilea din (1), obținem în final

$$I_n = \frac{x^n}{a}\sin ax + \frac{nx^{n-1}}{a^2}\cos ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2},$$

aceasta fiind relația de recurență cerută.

Pentru J_n se procedează asemănător.

28. Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul integralelor:

$$I_n = \int (\ln x)^n dx, \quad J_{m,n} = \int x^m (\ln x)^n, \text{ cu } m, n \in N.$$

R. I_n se calculează prin părți notînd $(\ln x)^n = u \Rightarrow \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}\,dx = du$ și $dx = dv \Rightarrow$ $\Rightarrow x = v$; rezultă: $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$, iar pentru $n \in N$ această relație devine $I_n = x[(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} + \ldots + (-1)^n n!]$.

Pentru $J_{m,n}$ se integrează prin părți notînd se

$$x^m\,dx = du \Rightarrow u = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ și } (\ln x)^n = v \Rightarrow \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}\,dx = dv;\ \text{rezultă}$$

$$J_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m,\,n+1}$$

și în general vom avea:

$$J_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}(\ln x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(\ln x)^{n-2} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n}\right].$$

29. Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul integralei

$$I_m = \int t^m e^{-t}\,dt.$$

R. Se integrează prin părți: notăm $e^{-t}\,dt = du \Rightarrow u = -e^{-t}$, $t^m = v \Rightarrow dv = mt^{m-1}\,dt$ și integrala dată devine: $I_m = -t^m e^{-t} + m\int t^{m-1}e^{-t}\,dt = -t^m e^{-t} + mI_{m-1}$.

30. Să se stabilească o relație de recurență pentru calculul integralei

$$I_n = \int \frac{e^x\,dx}{x^n}.$$

R. Se integrează prin părți și obținem:

$$I_n = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} I_{n-1} \text{ (relație valabilă pentru } n \neq 1).$$

Observație. În exercițiul de față se va admite că $I_1 = \int \frac{e^x}{x}\,dx$ nu se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare.

d. Integrarea funcțiilor raționale

Să se calculeze integralele:

31. $I_1 = \int \frac{dx}{2x^2 + 3}$, $I_2 = \int \frac{dx}{3x^2 + 1}$, $I_3 = \int \frac{dx}{4 - 3x^2}$, $I_4 = \int \frac{dx}{1 - 4x^2}$.

R. Se ține seamă de formulele (care se recomandă a fi memorate):

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a};\quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|.$$

32. $I = \int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

R. Ținînd seamă că $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$, funcția de integrat se poate scrie sub forma $\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$; de aici rezultă $A(x^2 - 1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = 1$ și făcînd succesiv pe $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, obținem: $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, și apoi $I = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{1/4} - \frac{1}{2(x-1)}$.

33. $I = \int \frac{x\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

R. Se ține seamă că $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)$, apoi funcția de integrat se descompune în fracții simple, rezultînd în final $I = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \text{arc tg } x\right]$.

34. $I = \int \frac{x^2\,dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$.

R. Se ține seamă că $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1)(x + 2)^2$; rezultă $I = \ln|x + 1| + \frac{4}{x+2}$.

35. $I = \int \frac{x^3\,dx}{(x - a)(x - b)}$.

R. Se observă că $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)} = x + (a + b) + \frac{(a^2 + ab + b^2)x - ab(a+b)}{(x-a)(x-b)}$;
în final $I = \frac{x^2}{2} + (a + b)x + \frac{a^3}{a-b}\ln|x - a| - \frac{b^3}{a-b}\ln|x - b|$.

36. $I_1 = \int \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2}\,dx$, $I_2 = \int \frac{x^3 - 2x}{x + 1}\,dx$.

R Pentru I_1 se observă că funcția de integrat se poate scrie astfel: $\frac{x^3-2}{x^3-x^2} = 1 + \frac{x^2 - 2}{x^2(x-1)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$; în final $I_1 = x - \frac{2}{x} + \ln\frac{x^2}{|x-1|}$. Pentru I_2: se efectuează mai întîi împărțirea în funcția de integrat și apoi se integrează, obținîndu-se $I_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + \ln|x + 1|$.

37. $I_1 = \int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)}$, $I_2 = \int \frac{x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx$.

R Pentru I_1 funcția de integrat se va scrie astfel:

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1}; \text{ în final}$$

$I_1 = -\frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. Pentru I_2 procedeu asemănător, obținîndu-se $I_2 = \ln\frac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x-3}} - \frac{13}{x-3}$.

38. $I = \int \frac{dx}{x^4 - x^3 + x - 1}$.

R. Funcția de integrat se poate scrie sub forma

$\frac{1}{x^4 - x^3 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}$, cu $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{6}$, $C = -\frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{3}$, rezultînd în final

$$I = \ln\frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[6]{|x^3+1|}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

39. $$I_1 = \int \frac{4x^2 + x + 4}{(x-1)(x+2)^2}\,dx, \quad I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{(x+1)^3(x-1)^2},$$

$$I_3 = \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2}, \quad I_4 = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2},$$

$$I_5 = \int \frac{x^6\,dx}{(x^2-5x+6)^2(x-1)^3}.$$

R. Funcțiile de integrat din $I_1 - I_5$ se descompun respectiv în : $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{6}{(x+2)^2}$,

$$\frac{1}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{1}{16(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3},$$

$$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)^2},$$

$$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2},$$

$$x + 8 + \frac{103}{8(x-1)} + \frac{15}{4(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{64}{x-2} + \frac{729}{8(x-3)}.$$

40. $$I = \int \frac{25\,dx}{2x^4 + 3x^3 + 3x - 2}.$$

R. Se poate scrie $\frac{25}{2x^4 + 3x^3 + 3x - 2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{2x-1}$;

identificînd se obține $A = -3,\ B = -4,\ C = -1,\ D = 8$ și

$$I = \ln \frac{(2x-1)^4}{|x+2|(x^2+1)^{3/2}} - 4 \operatorname{arctg} x.$$

41. $$I = \int \frac{x^2 - x}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx.$$

R. Se poate scrie: $\frac{x^2 - x}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$, de unde rezultă $x^2 - x =$
$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D$ și identificînd obținem $A = -1,\ B =$
$= -1,\ C = 1,\ D = 2$, de unde, în final $I = \ln \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}} + \sqrt{2}\ \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} x.$

42. $$I = \int \frac{(x+1)^3}{3x^4 + 10x^3 + 3}\,dx.$$

R. Putem scrie: $\frac{(x+1)^3}{3x^4 + 10x^3 + 3} = \frac{Ax+B}{3x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$, sau încă $(x+1)^3 =$
$= (A + 3C)x^3 + (B + 3D)x^2 + (3A + C)x + 3B + D$ cu

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1$$

și în final $I = \ln \sqrt[6]{3x^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

43. $$I = \int \frac{x^4\,dx}{(x-1)^2(x^2+4)};$$

R. Se verifică uşor că funcţia de integrat se poate scrie sub forma $\frac{x^4}{(x-1)^2(x^2+4)} =$

$= 1 + \frac{2x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2(x^2+4)} = 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$. Dezvoltînd şi identificînd obţinem $A = \frac{18}{25}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = \frac{32}{25}$, $D = -\frac{48}{25}$ şi $I = x + \frac{18}{25}\ln|x-1| + \frac{16}{25}\ln(x^2+4) -$

$$-\frac{1}{5(x-1)} - \frac{24}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2},$$

44. $$I = \int \frac{dx}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}.$$

R. Se va ţine seamă că numitorul funcţiei de integrat se poate scrie sub forma $(x+1)(x^2+1)^2$, de unde rezultă că avem descompunerea $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} +$

$$+ \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

În final $I = \frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4}\frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$

45. $$I_1 = \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx,\quad I_2 = \int \frac{4x^3 + 9x^2 + 3}{x^2(x^2-1)^2}\,dx,$$

$$I_3 = \int \frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}.$$

R. $I_1 = \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{x-1}{2(x^2+1)};$

$I_2 = -\frac{2x+3}{x(x^2+1)},\quad I_3 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^4).$

46. $$I_1 = \int \frac{x^2 + 8x + 21}{(x^2 - 4x + 9)^2}\,dx,\quad I_2 = \int \frac{4x^5(x-1)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}.$$

R $I_1 = \frac{3(x-7)}{2(x^2 - 4x + 9)} + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 9) + \frac{3\sqrt{5}}{\;}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}},$

$I_2 = -\frac{2}{3}\frac{(x^2-1)(x-1)}{x^4 + x^2 + 1} + \ln\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \right.$

$$\left. - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

47. $$I_1 = \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2},\quad I_2 = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx.$$

R. $I_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1};$

$I_2 = \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} x.$

48. $$I = \int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}.$$

R. Funcția de integrat este o funcție rațională pară ; se poate nota $x^2 = t$ și avem $\frac{x^2}{1-x^4} =$

$$= \frac{t}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}, \text{ cu } A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Observație. În cazul de față funcția de integrat se poate descompune în fracții simple și direct

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \text{ etc.}$$

49. $$I = \int \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+4}\,dx.$$

R. Funcția de integrat este o fracție rațională pară, în care, pentru integrare se poate face substituția $x^2 = t$, după care fracția în t astfel obținută se descompune în fracții simple și în urmă se integrează. Avem:

$$\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+4} = \frac{t(t+1)}{t+4} = t - 3 + \frac{12}{t+4} \text{ și prin urmare } I = \int\left(x^2 - 3 + \frac{12}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3x + 6\,\text{arctg}\,\frac{x}{2},$$

50. $$I_1 = \int \frac{x^4+1}{(x^2-1)^3}\,dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)^4},$$

R. Ambele funcții de integrat sînt pare și se poate face substituția $x^2 = t$, se efectuează descompunerea în fracții simple în t etc.

Altfel. Considerăm integrala $I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ și stabilim o formulă de recurență. Pentru aceasta, integrăm pe I_{n-1} prin părți, notînd $u = (x^2-a^2)^{-n}$ și $dv = dx$; avem

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{x^2}{(x^2-a^2)^n}\,dx,$$

rezultînd ușor formula de recurență

$$2(n-1)a^2 I_n + (2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} = 0.$$

Aplicînd această formulă, se obțin rezultatele:

$$I_1 = 2I_3 + 2I_2 + I_1 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|;$$

$$I_2 = \frac{15}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{8x^5-25x^3+15x}{8(x^2-1)^3}.$$

51. $$I = \int\frac{x^3}{(1-x^4)^4}\,dx.$$

R. Funcţia de integrat este pară şi s-ar putea aplica — pentru descompunere în fracţii simple — substituţia $t = x^4$. În cazul de faţă însă este recomandabil să se stabilească o formulă de recurenţă pentru calculul integralei $J_n = \int \frac{dx}{(1 - x^4)^n}$. Pentru aceasta se consideră $I_n = (a + bx^p)^n \, dx$, care se integrează prin părţi, luînd $u = (a + bx^p)^n$ şi $dx = dv$, rezultînd $I_n = x(a + bx^p)^n - np \int (a + bx^p)^{n-1} bx^p \, dx = x(a + bx^p)^n - npI_n + anpI_{n-1}$.

Pentru cazul particular J_n, avem $p = 4$, $a = 1$, trebuind a înlocui însă pe n cu $-n$, rezultînd $4nJ_{n+1} = (4n - 1)J_n + \frac{x}{(1 - x^4)^n}$. Se cunoaşte însă $J_1 = \frac{1}{4} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ şi se poate ajunge, din aproape în aproape, la relaţia de recurenţă : $I = J_4 - 2J_3 + J_2$.

52. $$I_1 = \int \frac{(x^2 - 1)\, dx}{x^4 + x^2 + 1}, \quad I_2 = \int \frac{3x^2 - 5}{x^4 + 6x^2 + 25}.$$

R. Funcţiile de integrat sînt pare ; în acest caz însă substituţia $x^2 = t$ nu oferă avantaje la descompunerea în fracţii simple în t. De aceea, pentru I_1 se caută o descompunere directă, astfel :

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

iar pentru I_2, asemănător

$$\frac{3x^2 - 5}{x^4 + 6x^2 + 25} = \frac{3x^2 - 5}{(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 5} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

În final, se obţin rezultatele:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{4x}{5 - x^2}.$$

53. $$I_1 = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}{(x^2 + 3)(x^2 + 4)} \, dx, \quad I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}, \quad I_3 = \int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)^2}.$$

R. Funcţiile de integrat sînt pare ; se face deci mai întîi substituţia $x^2 = t$ şi se procedează ca la exerciţiul anterior, obţinîndu-se:

$$I_1 = x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{3} - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2};$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{4} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right|;$$

$$I_3 = -\frac{3}{4} \ln \left|\frac{1 - x}{1 + x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{x}{2(x^2 - 1)}.$$

54. $$I = \int \frac{x\, dx}{x^4 - x^2 - 2}.$$

R. Funcţia de integrat este o fracţie impară de forma $\frac{P(x^2)x}{Q(x^2)}$; în acest caz se face substituţia $x^2 = t \Rightarrow 2x\, dx = dt$ şi avem : $I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - t - 2} = \frac{1}{2} \left[\int \left(\frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 2} \right) dt \right]$, cu

$$A = -\frac{1}{3} \text{ şi } B = \frac{1}{3}. \text{ În final } I = \frac{1}{6} \ln \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}.$$

55. $$I_1=\int\frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^3},\quad I_2=\int\frac{2\,dx}{x(x^2+1)^2};$$

R. Ambele funcţii de integrat sînt impare, observînd că avem:

$I_1=\int\frac{x^2\,x\,dx}{(x^2+1)^3}$ şi $I_2=\int\frac{2x\,dx}{x^2(x^2+1)^3}$; se face substituţia $x^2=t\Rightarrow 2x\,dx=dt$ şi se obţine

$$I_1=-\frac{1}{4}\,\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2},\quad I_2=\frac{1}{x^2+1}+\ln\frac{x^2}{x^2+1}.$$

56. $$I=\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+1)^3}\,dx.$$

R. Se va observa că putem scrie:

$$I=\int\frac{ax^2+x}{(x^2+1)^3}\,x\,dx+\int\frac{bx^2+d}{(x^2+1)^3}\,dx, \qquad (1);$$

dar, prima integrală din (1) se poate calcula folosind substituţia $x^2+1=t\Rightarrow 2x\,dx=dt$,

Cea de a doua integrală din (1) se poate calcula notind $x=\operatorname{tg}\varphi\Rightarrow dx=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=$

$$=(1+\operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi.$$

În final rezultă $I=-\frac{a}{2(x^2+1)}+\frac{a-c}{2(x^2+1)^2}+\frac{b}{8}\left[\operatorname{arctg}x+\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\right]+d\left[\frac{3}{4}\operatorname{arctg}x+\right.$

$$\left.+\frac{x}{x^2+1}-\frac{x(x^2-1)}{4(x^2+1)^2}\right].$$

57. $$I_1=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3x+1},\quad I_2=\int\frac{dx}{\operatorname{tg}x+1}.$$

R. Pentru I_1 se notează $\sin x=t\Rightarrow\cos x\,dx=dt$ şi avem $I_1=\int\frac{dt}{t^3+1}=\int\left(\frac{A}{t+1}+\right.$

$$\left.+\frac{Bx+C}{t^2-t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\text{ etc.}$$

Pentru I_2 se poate nota $\operatorname{tg}x=t\Rightarrow\frac{1}{\cos^2x}dx=dt$ sau $(1+\operatorname{tg}^2x)dx=dt$, sau încă $(1+t^2)dx=dt$; rezultă $I_2=\ln\sqrt{1+t}-\ln\sqrt[4]{t^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t$ şi revenind în substituţia făcută la început obţinem în final $I_2=\ln\sqrt{|\sin x+\cos x|}+\frac{x}{2}$.

58. $$I=\int\frac{x^2+1}{x^4-2x^2\cos\alpha+1}\,dx,$$

unde α este un arc oarecare.

R. Se ajunge uşor la forma

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dx}{x^2 + 2x\cos\frac{\alpha}{2} + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{\alpha}{2} + 1}\right]; \tag{1}$$

Apoi se ţine seama că avem:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 2x\cos\frac{\alpha}{2} + 1} = \int \frac{dx}{\left(x^2 + 2x\cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + 1}. \tag{2}$$

În (2) punem $\frac{x + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = t \Rightarrow \frac{dx}{\sin\frac{\alpha}{2}} = dt$ şi în final rezultă

$$I_1 = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Asemănător calculăm pe $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{\alpha}{2} + 1}$ obţinind

$I_2 = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ şi revenind la (1) obţinem $I = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - x^2}$,

59. $$I = \int \frac{x^4 + a}{(x^2 + x + 1)^n}\, dx,$$

R. Ţinînd seamă că $x^4 + a = (x^2 - x)(x^2 + x + 1) + x + a$, integrala dată se poate scrie astfel:

$$I = \int \frac{x + a}{(x^2 + x + 1)^n}\, dx + \int \frac{x^2 - x}{(x^2 + x + 1)^{n-1}}\, dx. \tag{1}$$

Dar, în cea de a doua integrală din (1), se observă că $x^2 - x = (x^2 + x + 1) - (2x + 1)$ şi (1) devine:

$$I = \int \frac{x + a}{(x^2 + x + 1)^n}\, dx - \int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^{n-1}}\, dx - \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^{n-2}}, \tag{2}$$

cele trei integrale din (2) calculîndu-se prin substituţia

$$x^2 + x + 1 = t.$$

60. $$I = \int \frac{x^9\, dx}{(1+x^5)^3},$$

R. Se observă că $x^9\, dx = x^5 \cdot x^4\, dx$; se face astfel substituţia $1 + x^5 = t$ şi integrala dată se scrie

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{t-1}{t^3}\, dt = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{1+x^5} + \frac{1}{2(1+x^5)^2}\right].$$

61. $$I_1 = \int \frac{x^5\, dx}{(1+x^3)^2}, \quad I_2 = \int \frac{x^7\, dx}{(1+x^4)^2}.$$

R. Se observă că $x^5\, dx = x^3 \cdot x^2\, dx$ şi că deci putem face substituţia $u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2\, dx$; astfel fiind, avem:

$$I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{x^3 \cdot 3x^2\, dx}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{(u-1)\, du}{u^2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) du = \frac{1}{3}\left(\ln |u| + \frac{1}{u}\right) \text{ etc.}$$

Pentru I_2, procedeu asemănător putîndu-se face substituţia $u = 1 + x^4$, rezultînd în final

$$I_2 = \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^4) + \frac{1}{1+x^4}\right].$$

Notă. I_1 se poate calcula şi prin substituţia $x^3 = t$, iar I_2 se poate calcula şi prin substituţia $x^4 = t$ (fiind vorba de integrarea unei fracţii iraţionale impare).

f. Integrarea funcţiilor iraţionale

Să se calculeze integralele iraţionale:

62. $$I = \int \frac{\sqrt{2x-1}}{x}\, dx.$$

R. Se notează $2x - 1 = t^2 \Rightarrow 2\, dx = 2t\, dt$ şi integrala dată devine $I = \int \frac{2t^2\, dt}{t^2+1} =$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 2\left(\sqrt{2x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\right).$$

63. $$I_1 = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad I_2 = \int \frac{x(2-x^2)dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

R. În I_1 se face substituţia $x^2 = t$; se obţine $I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right)$. În I_2 se face substituţia $x^2 = t \Rightarrow 2x\, dx = dt$ şi integrala devine $I_2 = \int \frac{2-t}{\sqrt{1+t}}\, dt$, în această ultimă formă se face substituirea $1 + t = u^2$ şi se obţine în final $I_2 = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{3}(8 - x^2)$.

64. $$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}}\, dx.$$

R. Se observă că putem scrie $I = 2\int \ln x \, d\sqrt{(1+x)}$ şi sub această formă putem integra prin părţi, notînd $\ln x = v \Rightarrow dv = \frac{1}{x} dx$, $d(\sqrt{1+x}) = du \Rightarrow \sqrt{1+x} = u$ şi integrala dată devine $I = \sqrt{1+x} \ln x - \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$. (1)

Dar, integrala din (1) se poate calcula folosind substituţia $1 + x = t^2$. În final rezultă

$$I = 2\sqrt{1+x} \ln |x| - 4\sqrt{1+x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right|.$$

65. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3}};$$

R. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{4x^2 + 3} = t - x\sqrt{4}$, (1); ridicînd la pătrat în (1) şi explicitînd, obţinem $x = \frac{t^2 - 3}{4t} \Rightarrow dx = \frac{t^2 + 3}{4t^2} dt$ şi deci $\sqrt{4x^2 + 3} = t - 2\frac{t^2 - 3}{4t} =$

$$= \frac{t^2 + 3}{2t}.$$

Astfel, integrala dată devine

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + 3} \cdot \frac{t^2 + 3}{4t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln (2x + \sqrt{4x^2 + 3}).$$

Asemănător se calculează integralele

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a}).$$

66. $$I_1 = \int \sqrt{ax^2 + b}\, dx, \quad I_2 = \int \sqrt{2x^2 + 1}\, dx.$$

R. I_1 se calculează prin părţi, luîndu-se $\sqrt{ax^2 + b} = t \Rightarrow \frac{ax \, dx}{\sqrt{ax^2 + b}} = dt$ şi $dx = dv \Rightarrow x = v$, integrala respectivă devenind: $I_1 = x\sqrt{ax^2 + b} - \int \frac{ax^2}{\sqrt{ax^2 + b}} dx = x\sqrt{ax^2 + b} -$

$- \int \frac{ax^2 + b - b}{\sqrt{ax^2 + b}} dx = x\sqrt{ax^2 + b} - I_1 + b\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$ sau $I_1 = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2 + b} + b\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}}$ (1)

ultima integrală din (1) calculîndu-se ca la exerciţiul 65, rezultatul integrării acesteia fiind

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln (\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + b}).$$

I_2 este un caz particular al integralei I_1, cu $a = 2$, $b = 1$.

67. $I_1 = \int \sqrt{3 - 4x^2}\, dx$, $I_2 = \int x\sqrt{2 + 2x - x^2}\, dx$.

R. Pentru I_1 se aplică formula din exercițiul precedent și avem $I_1 = \frac{x}{2}\sqrt{3-4x^2} +$
$$+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} \tag{1}$$

Integrala din membrul al doilea din (1) calculîndu-se cu formula $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$.

Pentru I_2, se observă că derivata funcției de sub radical este $(-2x+2)$; astfel fiind, integrala respectivă se poate scrie $I_2 = \frac{1}{2}\int[-(2-2x)+2]\sqrt{2+2x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}I' + I''$.

Pentru calculul lui I', notăm $2+2x-x^2 = t \Rightarrow (2-2x)dx = dt$ și $I' = \int\sqrt{t}\,dt =$
$= \frac{2}{3}(2+2x-x^2)\sqrt{2+2x-x^2}$.

Pentru I'' se observă că putem scrie $I'' = \int\sqrt{3-(x-1)^2}\,dx$ și notînd $x-1 = t \Rightarrow$
$\Rightarrow dx = dt$, avem în continuare:

$$I'' = \int\sqrt{3-t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{3-t^2} + \frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = \frac{x-1}{2}\sqrt{2+2x-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Înlocuind rezultatele parțiale obținute succesiv, avem în final:

$$I_2 = \frac{1}{6}(2x^2-x-7)\sqrt{2+2x-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

68. $I_1 = \int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx$, $I_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$,

$$I_3 = \int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}},\quad I_4 = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

R. Pentru I_1 se aplică formulele de la exercițiul anterior; rezultă:

$$I_1 = -\frac{3a^2+ax-2x^2}{6}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^3}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$$

Pentru I_2 se face substituția $\sqrt{x^2+x+1} = t+x$, de unde prin ridicarea la pătrat se obține $x = \frac{1-t^2}{2t-1}$ și integrala dată devine

$$I_2 = -2\int\frac{dt}{2t-1} = -\ln\left|2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1\right|.$$

Pentru I_3 se va face mai întîi substituția $x = \frac{1}{t}$; se obține

$$I_3 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Pentru calculul lui I_4 facem substituția $\sqrt{(x-1)(2-x)} = t(x-1)$, de unde, prin raționalizare, se obține x și apoi dx, integrala devenind:

$$I_4 = -\int\frac{2\,dt}{t^2+1} = -2\,\text{arctg}\frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x-1}.$$

69. $I_1 = \int\frac{x+1}{\sqrt{-x^2+x+1}}\,dx$, $I_2 = \int\frac{4x+7}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$.

R. Se observă că $d(-x^2+x+1) = (-2x+1)dx$; astfel fiind, avem:

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{-2(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{-2x+1}{\sqrt{-x^2+x+1}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-x^2+x+1} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)}}\right) \quad (1)$$

Notăm cu I_1' ultima integrală din (1) și avem:

$$I_1' = -3\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{4} - x - \frac{1}{2}\right)^2}}, \ (2); \text{ în (2) notăm } x - \frac{1}{2} = t \Rightarrow dx = dt \text{ și (2) devine:}$$

$$I_1' = -3\cdot\frac{4}{5}\arcsin\frac{4t}{5} \text{ etc.}$$

Asemănător se calculează și I_2, rezultînd:

$$I_2 = -4\sqrt{8+2x-x^2} + 11\arcsin\frac{x-1}{3}.$$

70. $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

R. Se face substituția $\frac{1+x}{1-x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ și $dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Astfel, integrala dată devine $I = 4\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2} = 4\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}dt = 4\left(\int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{dt}{(t^2+1)^2}\right) = 4 \operatorname{arctg} t -$

$$-4\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right),$$

sau, revenind la substituția făcută, avem:

$$I = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}.$$

71. $I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$, $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+4}}$, $I_3 = \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

R. Dacă funcția de sub radical este trinomul de gradul al doilea, atunci se face schimbarea de variabilă $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$; în cazul integralei I_1 avem deci $\sqrt{x^2-3x+2} = t - x$, (1). Ridicînd la pătrat în (1) rezultă $x = \frac{t^2-2}{2t-3} \Rightarrow dx = \frac{2(t^2-3t+2)}{(2t-3)^2}dt$ și revenind la (1), avem:

$$\sqrt{x^2-3x+2} = \frac{t^2-3t+2}{2t-3}.$$

În această situație, integrala respectivă devine

$$I_1 = \int \frac{2t-3}{t^2-2}\cdot\frac{2t-3}{t^2-3t+2}\cdot\frac{2(t^2-3t+2)}{(2t-3)^2}dt = 2\frac{dt}{t^2-2} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2-3x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}+x+\sqrt{2}}.$$

Altfel. Întrucît „c" din funcţia trinom de sub radical este pozitiv ($c = 2$), se poate face substituţia $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}$, sau, în cazul de faţă $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = tx - \sqrt{2}$. (2)
În (2) se ridică la pătrat, se explicitează x, se diferenţiază, urmîndu-se calculul ca în prima metodă.

Altfel. Deoarece trinomul de sub radicalul funcţiei de integrat are rădăcinile reale $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, putem face substituţia $\sqrt{(x-1)(x-2)} = t(x-1)$, (3) şi ridicînd la pătrat în (3) se

$$\text{obţine } x = \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} \Rightarrow dx = \frac{2t\, dt}{(t^2-1)^2}\text{; avem deci}$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = t\left(\frac{t^2-2}{t^2-1} - 1\right) = -\frac{t}{t^2-1}.$$

Prin urmare

$$I_1 = \int \frac{t^2-1}{t^2-2} \cdot \frac{t^2-1}{-t} \cdot \frac{2t\, dt}{(t^2-1)^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-2} \text{ etc.}$$

Pentru I_2 se poate folosi oricare din metodele indicate la I_1, obţinîndu-se

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 - 5x + 4} + x + 2}.$$

Pentru I_3 se poate folosi substituţia $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = t - x$ calculele în continuare fiind ca la I_1 şi I_2; se obţine

$$I_3 = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x - 1}.$$

Observaţie. Se recomandă a se nota şi formulele de integrare:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \dfrac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, & \text{cînd } a < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left[2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + 2}\right] & \text{cînd } a > 0. \end{cases}$$

Notă. Deşi este posibil ca folosind succesiv cele trei substituţii să se obţină rezultate diferite ca formă, identitatea acestora poate fi verificată uşor.

72. $$I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}.$$

R. Se face substituţia $x + 1 = t^{\alpha}$, unde α = c.m.m.m.c. al indicilor radicalilor din funcţia de integrat, adică $\alpha = 2 \cdot 3 = 6$. Avem deci $x + 1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\, dt$ şi integrala dată revine

$$I = \int \frac{6t^2\, dt}{2t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3\, dt}{1 + 2t} = 6\int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8(2t+1)}\right) dt \text{ etc.}$$

73. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\, dx.$

R. Se notează $x + 1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\, dt$ şi integrala dată devine

$$I = 6\int \frac{t^3 - t^2}{t^3 + t^2} t^5\, dt = t^6 - \frac{12}{5}t^5 + 3t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 12t + 12 \ln|t + 1|, \quad \text{cu } t = \sqrt[6]{x+1}.$$

74. Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad I_3 = \int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad I_5 = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}, \qquad I_6 = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}},$$

$$I_7 = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx, \qquad I_8 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \qquad I_9 = \int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

$$I_{10} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}; \qquad I_{11} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

R. În toate integralele de mai sus care conţin funcţia iraţională $\sqrt{k^2-x^2}$ se poate face substituţia $x = k\sin t$, sau $x = k\cos t$, funcţiile de integrat devenind funcţii raţionale în $\sin t$ sau $\cos t$. Pentru I_1 se poate face substituţia $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$ şi integrala devine

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^2 t} = \int \operatorname{ctg}^2 t\,dt, \text{ în final obţinîndu-se}$$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x.$$

Pentru I_2 se face substituţia $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$ şi $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$, iar $t = \arcsin\frac{x}{2}$; astfel integrala devine $I_2 = \int \frac{8\sin t\cos t\,dt}{2\cos t} = 4\int \sin^2 t\,dt = 2t - \sin 2t = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$. Pentru celelalte integrale, substituţii analoge, obţinîndu-se rezultatele: $I_3 = \frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin x$; $I_4 = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; $I_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$; $I_6 = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $I_7 = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$; $I_8 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; $I_9 = -\frac{1}{15}(2a^2+3x^2)\sqrt{(a^2-x^6)}$; $I_{10} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$; $I_{11} = \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{x}{8}\sqrt{1-4x^2}$.

75. $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

R. Se face substituţia $1-x^2 = t^2x^2 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{x^2}(1-x^2)$, (1) şi diferenţiind în (1) rezultă $dx = -tx\frac{dt}{1+t^2}$; înlocuind în integrală, aceasta devine $I = \int -\frac{t^2+1}{t^2}\,dt = -t + \frac{1}{t}$ sau, revenind la substituţia făcută, $I = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1-x^2}}$,

76. $I = \int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$.

R. Se face substituţia $a + bx^n = x^n t^n \Rightarrow t^n = \frac{1}{x^n}(a + bx^n)$, (1) şi diferenţiind în (1) se obţine $dx = -\frac{xt^{n-1}\,dt}{t^n - b}$; astfel $I = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{at}$ şi revenind la substituţia făcută la început, rezultă $I = \frac{x}{a(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}}$.

77. $I_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

R. Se face schimbarea de variabilă $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$ şi integrala dată se transformă în $I_m = \int \sin^m t\,dt = \int \sin^{m-1} t \sin t\,dt$, (1). Dar integrala din (1) se calculează prin părţi, luînd $\sin^{m-1} t = u \Rightarrow (m - 1)\sin^{m-2} t \cos t\,dt = du$ şi $\sin t\,dt = dv \Rightarrow -\cos t = v$. Cu aceste notaţii, după efectuarea calculelor, se obţine:

$$I_m = -\frac{\sin^{m-1} t \cos t + (m - 1)I_{m-2}}{m}.$$

78. Să se găsească o relaţie de recurenţă pentru calculul integralei

$$I_n = \int x^n \sqrt{2ax - x^2}\,dx.$$

R. $I_n = -\frac{x^{n-1}(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{n + 2} + a\frac{(2n + 1)}{n + 1} I_{n-1}$.

g. Integrarea funcţiilor trigonometrice

Să se calculeze integralele:

79. $$I = \int \frac{\sin x \cos x}{3 \sin x + 2 \cos^2 x}\,dx;$$

R. Notînd cu $f(\sin x, \cos x)$ funcţia de integrat, se observă că $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$; în această situaţie facem substituţia $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$ şi integrala dată se transformă în $I = \int \frac{t\,dt}{(2 - t)(2t + 1)}$, această integrală calculîndu-se prin descompunerea prealabilă în fracţii simple a funcţiei de integrat. În final se obţine:

$$I = -\frac{2}{5} \ln\left|\sin x - 2\right| - \frac{1}{10} \ln\left|2 \sin x + 1\right|.$$

80. $I_1 = \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$, $\quad I_2 = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos 2x}$.

R. Dacă în funcţia de integrat din I_1 se înlocuieşte $\cos x$ prin $-\cos x$, aceasta îşi schimbă semnul: astfel fiind, se face schimbarea de variabilă $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$ şi integrala dată devine $I_1 = \int \frac{1 - t^2}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} - t = -\left(\frac{1}{\sin x}\right) + \sin x$.
În I_2 se poate face aceeaşi schimbare de variabilă, obţinîndu-se

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1 + \sqrt{2}\sin x}{1 - \sqrt{2}\sin x}\right|.$$

81. $I_1 = \int \frac{dx}{\cos x \cos 2x}$, $I_2 = \int \frac{\sin x\, dx}{1 + \cos x + \cos 2x}$, $I_3 = \int \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$.

R. În I_1 se ia $\sin x = t$ şi se obţine

$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$; în I_2 şi I_3 se poate nota fie $\sin x$ fie $\cos x$ prin t, obţinindu-se $I_2 = \ln \left| 2 + \frac{1}{\cos x} \right|$, $I_3 = \frac{4}{2 + \sin x} + 2 \ln(2 + \sin x)$.

82. $I_1 = \int \frac{\sin 2x}{\cos 3x} dx$, $I_2 = \int \frac{\sin x\, dx}{1 + \cos x + \cos 2x}$.

R. În I_1 dacă se înlocuieşte $\sin x$ prin $-\sin x$, funcţia de integrat îşi schimbă semnul; se face deci substituţia $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\, dx = dt$ şi integrala dată devine

$$I_1 = 2 \int \frac{t\, dt}{3t - 4t^3} = 2 \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{\sqrt{3} - 2t} + \frac{C}{\sqrt{3} + 2t} \right) dt \text{ etc.}$$

În I_2 se face aceeaşi substituţie, din acelaşi motiv ca la I_1, rezultînd

$$I_2 = -\int \frac{dt}{t + 2t^2} = \ln \left| \frac{2t + 1}{t} \right| = \ln \left| 2 + \frac{1}{\cos x} \right|.$$

83. $I_1 = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $I_2 = \int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$, $I_3 = \int \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} x} dx$,

$I_4 = \int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^2}$, $I_5 = \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x}$, $I_6 = \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} dx$.

R. Funcţia de integrat din I_1 îşi păstrează semnul dacă înlocuim concomitent pe $\sin x$ cu $-\sin x$ şi $\cos x$ prin $-\cos x$; astfel fiind, facem substituţia $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$ sau $(1 + t^2)dx = dt$ şi integrala dată devine $I_1 = \int \frac{t\, dt}{(t+1)(t^2 + 1)} = \int \left(\frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} \right) dt =$
$= -\frac{1}{4} \ln (t^2 + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t$, de unde revenind la substituţia făcută iniţial, obţinem în final $I_1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln | \sin x + \cos x |$.

Observaţie. Integrala $I_1' = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ se poate calcula asociat cu I_1, observînd că $I_1 + I_1' = x$ şi $I_1' - I_1 = \ln |\cos x + \sin x|$, de unde rezultă imediat I_1' şi I_1.

În integralele $I_2 - I_6$ se face din aceleaşi motive ca la I_1, substituţia $\operatorname{tg} x = t$, obţinîndu-se rezultatele:

$I_2 = \ln | \cos x + \sin x |$, $I_3 = \sin 2a \ln |\sin(a + x)| - x \cos 2a$, $I_4 = -\frac{1}{b} \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}$,

$I_5 = \frac{ax + b \ln | a \cos x + b \sin x |}{a^2 + b^2}$, $I_6 = \frac{\ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x)}{2(a^2 - 1)}$ (cu $a \neq \pm 1$).

84. $I_1 = \int \frac{\cos^2 x\, dx}{\cos 2x}$, $I_2 = \int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos 2x}$.

R. Calculul acestor integrale se face asociat, observînd că

$I_1 + I_2 = \int \frac{dx}{\cos 2x}$ şi $I_1 - I_2 = \int dx = x$, de unde rezultă imediat $I_1 = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]$ şi $I_2 = \frac{1}{2} \left[-x + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]$.

85. $I_1 = \int \frac{dx}{\cos^2 x + a^2 \sin^2 x}$, $I_2 = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

R. Deoarece funcţia de integrat din I_1 îşi păstrează semnul cînd înlocuim simultan pe $\sin x$ prin $-\sin x$ şi $\cos x$ prin $-\cos x$, facem substituţia $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$ sau $(1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = dt$. Se obţine $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg} x)$. Pentru I_2 se observă că $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$; se face astfel substituţia $\operatorname{tg} 2x = t$ şi avem $I_2 = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{2}}$.

86. $I_1 = \int \frac{dx}{a + b \cos x}$, $I_2 = \int \frac{dx}{a + b \sin x}$.

R Deoarece funcţiile de integrat nu-şi schimbă semnul * cînd înlocuim pe $\sin x$ cu $-\sin x$, sau $\cos x$ prin $-\cos x$ şi nu-şi păstrează semnul cînd facem înlocuirea concomitentă a acestora în acest caz se face substituţia $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = dt$, sau încă $dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$

$\left(\text{deoarece } \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)$.

Astfel fiind, avem $I_1 = 2 \int \frac{dt}{a + b + (a - b)t^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ pentru $a^2 > b^2$ şi

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b - a}\, \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b + a}}{\sqrt{b - a}\, \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b + a}}, \text{ pentru } b^2 > a^2, \text{ iar pentru } a = b,\ I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

Corespunzător se găsesc următoarele rezultate pentru I_2 (care se calculează tot prin substituţia $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$).

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{ pentru } a^2 > b^2;$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}}, \text{ pentru } b^2 > a^2;$$

$$I_2 = -\frac{2}{a} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{a}}, \text{ pentru } a = b,$$

87. $I = \int \frac{dx}{3 \cos x + \sin x + 1}$.

R. Funcția de integrat nu-și schimbă semnul cînd înlocuim pe $\sin x$ cu $-\sin x$ și nici cînd înlocuim pe $\cos x$ cu $-\cos x$; de asemenea, dacă înlocuim concomitent pe $\sin x$ și $\cos x$ cu opusele acestora, funcția de integrat nu-și păstrează semnul. În acest caz, se face substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și integrala dată se transformă în $I = -\int \frac{dt}{(t+1)(t-2)} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+1}{t-2}\right| =$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|.$$

88. $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$, $\quad I_2 = \int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$, $\quad I_3 = \int \frac{dx}{\cos x - \sin x}$.

R. Cele trei integrale se calculează cu substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, iar pentru ușurința calcului se va putea introduce corespunzător și $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$; se obțin rezultatele:

$$I_1 = \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|, \quad I_2 = \frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|, \quad I_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)\right|.$$

89. $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$, $\quad I_2 = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$, $\quad I_3 = \int \frac{\cos^3 x + 2\cos x + 1}{\cos x + 2}\,dx$.

R. În I_1 se face substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; rezultă în final $I_1 = \frac{1}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2(1+\cos x)}$.

În I_2 se face de asemenea substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ și rezultă în final $I_2 = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|$.

În I_3 se efectuează mai întîi împărțirea în funcția de integrat și rezultă:

$I_3 = \int\left(\cos^2 x - 2\cos x + 6 - \frac{11}{2+\cos x}\right)dx$, integrala $\int\frac{dx}{2+\cos x}$ calculîndu-se prin substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. În final se obține: $I_3 = \frac{13}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - 2\sin x - \frac{22\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}$.

Observație. Calculul direct al integralei I_3 prin substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ este destul de anevoios.

90. $I = \int \frac{\cos^2 x + 3\cos x - 1}{\cos^3 x + 5\cos^2 x + 8\cos x + 4}\,dx$.

R. Notînd $\cos x = t$, funcția de integrat se poate scrie sub forma $\frac{t^2+3t-1}{t^3+5t^2+8t+4} = \frac{3}{(t+2)^2} + \frac{4}{t+2} - \frac{3}{t+1}$ și $d(\cos x) = dt \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. În final se obține

$$I = 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

91. $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

R. Se observă că $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)$, (1). Datorită simetriei în $\sin x$ şi $\cos x$ din (1), putem introduce arcul auxiliar $t = x - \frac{\pi}{4}$ şi integrala dată devine $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{\cos t\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2t\right)}$, (2).

În (2) notăm $\sin t = u$ şi integrala se transformă în $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{(1-u^2)\left(\frac{1}{2}+u^2\right)}$, această integrală calculîndu-se prin descompunerea prealabilă în fracţii simple a funcţiei de integrat

$$\frac{1}{(1-u^2)\left(\frac{1}{2}+u^2\right)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{Cu+D}{\frac{1}{2}+u^2} \text{ etc.}$$

92. $I_1 = \int \sin 3x \cos 5x \, dx$, $I_2 = \int \cos x \cos 3x \cos 6x \, dx$, $I_3 = \int \sin^2 3x \cos^2 x dx$.

R. Funcţia de integrat din I_1 se scrie sub forma: $\frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$, rezultînd imediat $I_1 = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4}$; pentru I_2, funcţia de integrat se scrie sub forma: $\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 6x = \frac{1}{4}(2\cos 6x \cos 4x + 2\cos 6x \cos 2x) = \frac{1}{4}(\cos 10x + \cos 8x + \cos 4x + \cos 2x)$, integrarea acum nemaicomportînd nici o dificultate. În I_3, trecem de la sinus şi cosinus de puteri la cosinus de arce multiple şi funcţia de integrat devine $\sin^2 3x \cos^2 x = \frac{1-\cos 6x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}(-\cos 6x \cos 2x - \cos 6x + \cos 2x - 1)$; apoi se ţine seama că $\cos 6x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x)$ rezultînd în final $I_3 = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 6x}{24} - \frac{\sin 8x}{64}$.

II. Integrale definite

93. Să se calculeze integralele definite

$I_1 = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$; $\quad I_2 = \int_0^1 (3x^2+4)e^{2x}dx$;

$I_3 = \int_{-a}^{0} (e^x - e^{4x})\,dx$;

$I_4 = \int_0^1 (2^x + 2^{-x})\,dx$; $\quad I_5 = \int_2^3 x^2 \ln(x^6 - 1)dx$;

$$I_6 = \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln x)^3}; \qquad I_7 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}};$$

$$I_8 = \int_0^7 \frac{1 + \sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt[3]{x + 1}}\, dx; \qquad I_9 = \int_{1/e}^{e} \frac{|\ln x|}{x}\, dx;$$

$$I_{10} = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1 + x)^2}\, dx.$$

R. $I_1 = -\int_1^2 \frac{x - 2}{(x^2 - 4x)^2}\, dx + \int_2^3 \frac{x - 2}{(x^2 - 4x)^2}\, dx$ şi efectuînd toate calculele obţinem $I_1 = \frac{1}{12}$; I_2 se integrează prin părţi, rezultînd în final $I_2 = \frac{11}{4}(e^2 - 1)$; $I_3 = \frac{3}{4} - e^{-a} + \frac{1}{4} e^{-4a}$. $I_4 = \frac{3}{2 \ln 2}$; pentru calculul integralei I_5 se va face mai întî substituţia $x^3 = u$, apoi se integrează prin părţi rezultînd în cele din urmă:

$$I_5 = \frac{x^3 + 1}{3} \ln |x^3 + 1| + \frac{x^3 - 1}{3} \ln |x^3 - 1| - \frac{2}{3} x^3 \Big|_2^3;$$

$I_6 = - \frac{1}{2(1 + \ln x)^2} \Big|_1^e$; în I_7 se face mai întîi substituţia $\sqrt{1 - x^2} = t(1 - x)$ şi integrala devine $I_7 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\sqrt{3}}$; în I_8 se ia mai întîi $\sqrt[6]{x + 1} = t \Rightarrow dx = 6t^5\, dt$ etc.; $I_9 = \int_{1/e}^{1} -\frac{\ln x}{x}\, dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = 1$;

$I_{10} = \frac{1}{2}(e - 2)$.

94. Să se calculeze integralele definite

$$I_1 = \int_2^5 \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}\, dx; \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2)^2} \operatorname{arctg} x\, dx;$$

$$I_2' = \int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \operatorname{arctg} x\, dx; \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\, dx;$$

$$I_4 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{1 + x + x^2}; \qquad I_5 = \int_1^e \left[\frac{\ln |x|}{x} + x + \frac{1}{x}\right] dx;$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + x}}{1 + \sqrt[3]{1 + x}}\, dx; \qquad I_7 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2};$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx; \qquad I_9 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

R. $I_1 = \frac{15}{2} - 8\ln 2$; pentru I_2 și I_2' se ia $\operatorname{arctg} x = t$, rezultă în final $I_2 = \frac{1}{8}$ și $I_2' = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$; pentru I_3 se ia mai întîi $x = \operatorname{tg} \varphi$ și integrala se transformă în

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi -$$

$$- \int_0^{\pi/4} \ln \cos \varphi \, d\varphi \text{ și apoi se ia } \frac{\pi}{4} - \varphi = \theta \text{ rezultînd}$$

$I_3 = \frac{\pi}{2} \ln 2$; în calculul integralei I_4 se ia $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t$ și cînd $x = -\frac{1}{2}$, $t = 0$ iar cînd $x \Rightarrow \infty$, $t \to \infty$, rezultînd în final $I_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$; $I_5 = \frac{e^2}{2} + 1$; pentru calculul integralei nedefinite I_6 se ia $\sqrt[6]{1 + x} = t \Rightarrow dx = 6t^5$, rezultînd în cele din urmă $I_6 = 6\left[\frac{x - 6}{7}\sqrt[6]{x + 1} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{(x + 1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{x + 1} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x + 1}\right]\Big|_0^1$;

$I_7 = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + \frac{1}{8} \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}\Big|_{-1}^{1}$;

$I_8 = \left|\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}\right|$; în I_9 se notează $x = \sin y$, rezultînd $I_9 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

95. Să se calculeze integralele definite

$$I_1 = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 2x \, dx; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 2x} dx;$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \, dx}{4\cos^2 x + \sin^2 x}; \quad I_4 = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{5 - 4\cos x} dx;$$

$$I_5 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2(2\cos^2 x + \cos x - 1) dx;$$

$$I_6 = \int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} + \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\right) dx; \quad I_7 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt{3 + \sin^2 x}};$$

$$I_8 = \int_0^{1/2} e^{\arcsin x} \cdot \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad I_9 = \int_0^{1/2} e^{\arcsin x} dx;$$

$$I_{10} = \int_0^{\pi/8} \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right) dx.$$

R. Avem $I_1 = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \sin^2 2x \, dx = \left| \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin^3 2x}{6} \right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$; pentru I_2 se înlocuieşte x prin $\frac{\pi}{2} - x$ şi rezultă $I_2' = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x \sin x}{1 + \cos^2 2x} dx$, apoi se adună I_2 cu I_2' etc., rezultînd $I_2 = \frac{\pi}{16}$; $I_3 = -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{4}$; se ia $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, rezultînd în final $I_4 = \frac{\pi}{12}$; $I_5 = \frac{\pi^2}{2} - 4$;

pentru I_6 se ţine seama că putem scrie

$I_6 = \int_0^{\pi/2} [x \, d(\operatorname{arctg}(\sin x)) - d(\operatorname{arctg}(\cos x))] \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\sin x) dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx$,

apoi se pune $x = \frac{\pi}{2} - t$, în final rezultînd $I_6 = \frac{\pi}{8}$; în I_7 se face substituţia $\cos x = u$ şi integrala devine $I_7 = \int_1^0 \frac{1 - u^2}{\sqrt{4 - u^2}} du$, (1), apoi în (1) facem din nou schimbarea de variabilă notînd $u = 2 \sin t$ rezultînd în final $I_7 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$; integralele nedefinite I_8 şi I_9 se calculează prin părţi: $u = x$, $dv = e^{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ rezultînd imediat $I_8 = xe^{\arcsin x} - I_9$ (1) sau notînd $u = e^{\arcsin x}$ şi $v = -\sqrt{1 - x^2}$, rezultă $I_8 = -\sqrt{1 - x^2} \, e^{\arcsin x} + I$ (2), din (1) şi (2) obţinîndu-se apoi I_8 şi I_9;

$$I_{10} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos 4x}{2} - 2 \cos 2x \right) dx = \left. \frac{\sin 4x}{8} - \sin 2x \right|_0^{\frac{\pi}{8}} \text{ etc.}$$

96. Comparînd integralele:

$$A = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx, \quad B = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx, \quad C = \int_0^{\pi/2} \ln (\sin 2x) dx = \int_0^{\pi} \ln \sin u \frac{du}{2},$$

să se arate că $A = B = C = 2A + \frac{\pi}{2} \ln 2$.

R. Punînd $x = \frac{\pi}{2} - u$, avem $A = -\int_{\pi/2}^{0} \ln \sin u \, du = \int_{2}^{\pi/2} \ln \sin u \, du = N$. Pentru C se notează $2x = v$.

$$C = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin v \, dv = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \ln \sin v \, dv + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin v \, dv \right).$$

Dar ultima integrală din paranteză se transformă în prima prin schimbarea $v = \pi - w$ şi prin urmare $C = A$. În final, făcînd suma $A + B = \int_0^{\pi/2} (\ln \sin x + \ln \cos x) \, dx =$
$= \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{2} dx + \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx$ sau $2A = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + A$, de unde

$A = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

A reprezintă aria cuprinsă între curba $y = \ln \cos x$, axa xx' şi asimptota $x = \frac{\pi}{2}$.

97. Se dau hiperbola echilateră $x^2 - y^2 - 7 = 0$ şi parabola $y^2 = \frac{9}{4} x$ şi se cere:

1° Să se calculeze aria cuprinsă între cele două curbe.

2° Volumul general de domeniul de la pct. 1° prin rotirea acestuia în jurul axei xx' cu 180°.

R. Punctele de intersecţie ale celor două curbe sînt $M(4, 3)$, $M'(4, -3)$, vîrfurile hiperbolei fiind în $(\sqrt{7}, 0)$ şi $(-\sqrt{7}, 0)$. Astfel fiind, aria respectivă este dată de

$$A = 2\left(\frac{3}{2}\int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \int_{\sqrt{7}}^4 \sqrt{x^2 - 7}\, dx\right),$$ iar volumul rezultă din $$V = \pi\left(\frac{9}{4}\int_0^4 x\, dx - \int_{\sqrt{7}}^4 (x^2 - 7)\, dx\right).$$

98. Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei $f(x) = \frac{1}{|x + \sqrt{4 - x^2}|}$, axa $x'x$ şi dreptele $x = 0$ şi $x = 2$.

R. $A = \frac{\pi}{4}$ (pentru calculul integralei nedefinite se va putea nota $x = 2 \sin t$ şi apoi $x = 2 \cos t$, adunînd apoi integralele respective).

99. Să se calculeze aria mărginită de prima bisectoare a axelor de coordonate şi curba de ecuaţie $f(x) = x \sin x$.

R. $$A = \int_0^{\pi/2} (x - x \sin x) dx = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

100. Se consideră funcţia $f(x) = e^{-x} \sin x$ şi se cere să se calculeze aria cuprinsă între curba reprezentativă, axa $x'x$ şi dreptele $x = 0$, $x = k\pi$. Să se găsească apoi valoarea acestei arii cînd $k \to \infty$.

R. $a = \frac{1 - (-1)^k e^{-k\pi}}{2}$ şi cînd $k \to \infty$, $A = \frac{1}{2}$.

101. Se consideră funcţiile $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ şi $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ şi se cere să se calculeze aria cuprinsă între cele două curbe, axa yy' şi dreapta $x = \lambda$. Care este valoarea acestei arii cînd $\lambda \to \infty$?

R. $A = \int_0^{\lambda} [f(x) - g(x)] dx = 1 - e^{-\lambda}$ şi cînd $\lambda \to \infty$, $A = 1$.

102. Se consideră funcția $f(x) = \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ $(n \in N \setminus \{1\})$ și se cere să se calculeze aria din primul cadran mărginită de curba reprezentativă, axa absciselor și asimptota $x = 1$.

R. Se poate scrie $A_{n,\lambda} = \int_0^{\lambda} \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx$ cu $\lambda \nearrow 1$,

Dar $A_{n,\lambda} = -\frac{1}{2n} \int_0^{\lambda} \frac{d(1-x^{2n})}{\sqrt{1-x^{2n}}} = -\frac{1}{n}\left[\sqrt{1-\lambda^{2n}} - 1\right]$ și cînd $\lambda \nearrow 1$ $A_n = \frac{1}{n}$.

103. Să se calculeze aria mărginită de curba de ecuație $f(x) = \sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) - 1$, axa $x'x$ și dreptele $x = \sqrt{e}$, $x = e^2$.

R. Intersecțiile curbei cu axa absciselor sînt punctele $(1, 0)$ și $(\sqrt{e}, 0)$: aria respectivă este deci

$A = \int^{\sqrt{e}} f(x)dx$, calculul integralelor $\int \sin(\pi \ln x)dx$ și $\int \cos(\pi \ln x)dx$ făcîndu-se prin părți,

notîndu-se pentru ușurința calculului $\pi \ln x = \alpha \Rightarrow x = e^{\alpha/\pi}$ și $dx = \frac{1}{\pi} e^{\alpha/\pi}$.

În definitiv rezultă $A = \frac{1}{\pi^2+1} e^{\alpha/\pi} (\cos\alpha + \pi \sin\alpha) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$.

104. Se dă curba de ecuația $y^2 = x^3$ și se cere să se calculeze volumul generat de aria cuprinsă între curbă, axa $x'x$ și dreapta $x = a$, cînd aceasta se rotește în jurul axei absciselor cu $360°$.

Să se calculeze de asemenea volumul generat de aria cuprinsă între curbă, axa ordonatelor și dreapta $y = \sqrt{a^3}$, cînd această arie se rotește cu $360°$ în jurul axei yy'.

Pentru ce valoare a lui a cele două volume sînt egale ?

R. $V_1 = \pi \int_0^a x^3 dx = \frac{\pi a^4}{4}$, $V_2 = \pi \int_0^{a^{3/2}} x^2 dy = \frac{3\pi}{7} a^3 \sqrt{a}$.

Din $V_1 = V_2 \Rightarrow a = \left(\frac{12}{7}\right)^2$.

105. Să se calculeze volumul generat de aria din cadranul întîi cuprinsă între curba de ecuație $f(x) = \frac{x}{4x^3+1}$ și axa $x'x$, cînd această arie se rotește în jurul axei absciselor cu $360°$.

R. $V = \pi \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{4x^3+1}\right)^2 dx = \frac{\pi}{12} \int_0^{\infty} \frac{d(4x^3+1)}{(4x^3+1)^2} = \frac{\pi}{12} \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda} \frac{d(4x^3+1)}{(4x^3+1)^2} = \frac{\pi}{12} \lim_{\lambda\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4\lambda^3+1}\right) = \frac{\pi}{12}$.

106. Să se calculeze volumul generat de aria cuprinsă între curba de ecuație $f(x) = \frac{1}{x} e^{1/x}$, axa $x'x$ și axa ordonatelor.

R. $V = \pi \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx = \pi \int_{\lambda}^{\lambda'} \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx$ cu $\lambda \to -\infty$ și $\lambda' \to 0$. Efectuînd calculele se găsește $V = -\frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{2}{\lambda'}} - e^{\frac{2}{\lambda}}\right)$ și cînd $\lambda' \nearrow 0$, iar $\lambda \to -\infty$, $V = \frac{\pi}{2}$.

107. Se dă funcția $f(x) = \sqrt{x}$ arc $\text{tg}\sqrt{x}$ cu $x \in [0, \infty)$ și se cere să se găsească volumul generat de aria mărginită de curba reprezentativă a lui $f(x)$, dreptele $y = 0$ și $x = \sqrt{3}$ în jurul axei $x'x$.

R. $V = \pi \int_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg}^2 x \, dx$, integrala nedefinită putîndu-se calcula prin părți luînd $x\,dx = du$ și $\operatorname{arctg}^2 x = v$. Rezultă

$$V = \frac{2}{9}\pi^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi^2 + \pi \ln 2.$$

107. a. Să se găsească volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $y = \sqrt{x\, f(x)}$ în jurul axei $x'x$, în intervalul $0 \leqslant x \leqslant \pi$, unde $f(x)$ este soluția ecuației diferențiale $f''(x) + f(x) = 0$ și care verifică condițiile $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

R. Din $f''(x) + f(x) = 0$ rezultă că $f(x) = a \cos x + b \sin x$ și din $f(0) = 0$ și $f'(0) = 1$, se obține $f(x) = \sin x$. Avem deci $V = \pi \int_{0}^{\pi} x \sin x \, dx = \pi(\sin x - \cos x)\Big|_{0}^{\pi} = \pi^2$.

III. Ecuații diferențiale

108. Să se arate că funcțiile următoare verifică ecuațiile diferențiale menționate în dreptul fiecăreia, precizîndu-se și domeniul de aplicabilitate.

1° $y = \frac{ae^x + be^{-x}}{x}$: $xy'' + 2y' - xy = 0$.

2° $y = e^{m \arcsin x}$: $(1 - x^2)y'' - xy' - m^2y = 0$.

3° $y = \sin(m \arcsin x)$: $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

4° $y = \frac{\sin(m \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$: $(1 - x^2)y'' - 3xy' + (m^2 - 1)y = 0$.

5° $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$: $(1 - x^2)y' - xy + 1 = 0$.

6° $y = \sqrt{\sqrt{1 + x^2} \pm 1}$
7° $y = \sqrt{\sqrt{1 + x^2} \pm x}$ } : $(1 + x^2)y'' + xy' - \frac{y}{4} = 0$.

9° $y = (x + 1)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$: $y'\cos x - y = 1 + \sin x$.

10° $y = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x + 1)$: $y'\cos^2 x - y = e^{\operatorname{tg} x}$.

109. Să se găsească o relație diferențială de forma $f(x, y, y', \ldots) = 0$, independentă de constantele $C_1, C_2, \ldots$, în următoarele exemple:

1° $y = C_1x^2 + C_2x$. (1)

R. Avem $y' = 2C_1x + C_2$, $y'' = 2C_1$, (2)

și eliminînd pe C_1 și C_2 între (1) și (2) obținem relația diferențială $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

2° $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}$. **R.** $y'' - a^2y = 0$.

3° $y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$. **R.** $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

4° $\frac{C_1}{x} + C_2 = y$. **R.** $xy'' + 2y' = 0$.

5° $y = C_1\ln x + C_2$. **R.** $xy'' + y' = 0$.

6° $y = \frac{C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}}{x}$. **R.** $xy'' + 2y' - a^2xy = 0$.

7° $y = (C_1 + C_2x)\cos ax + (C_3x + C_4)\sin ax$. **R.** $y^{IV} + 2a^2y'' + a^4y = 0$.

8° $y = C_1\arcsin x + C_2$. **R.** $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$.

9° $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$. **R.** $x^2y'' + xy' + y = 0$.

10° $y = C_1(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + C_2(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$. **R.** $(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2y = 0$.

11° $y = Cx + \frac{a}{C}$; $y = \frac{x^2 - C^2}{2C}$. **R.** $xy'^2 - yy' + a = 0$; $xy'^2 - 2yy' - x = 0$.

12° $y = C_1x\cos(\ln x) + C_2x\sin(\ln x) + x\ln x$. **R.** $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$.

Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, cu variabile separabile:

110. $(x^2 - a^2)y' - y = 0$.

R. Ecuația se poate scrie sub forma $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 - a^2}$ și integrînd avem $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x^2 - a^2}$, de unde rezultă $\ln|y| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C'$ și luînd $C' = \frac{1}{2a}\ln C$, obținem $y^{2a} = C\left|\frac{x - a}{x + a}\right|$.

111. $yy' = x$.

R. Avem $\int y\, dy = \int x\, dx$, cu soluțiile $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$.

112. $y' = \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

R. Ecuația se poate scrie sub forma $\frac{\sin y}{\cos y}\, dy = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$, de unde, după integrare, rezultă soluția $y = \arccos \frac{C}{\sin x}$.

113. $y' \sin 2x + \sin 2y = 0$.

R. Putem scrie $\int \frac{dy}{\sin 2y} + \int \frac{dx}{\sin 2x} = 0$, cu soluția $y = \operatorname{arctg}(C \operatorname{ctg} x)$.

114. $y' \sin x = y \ln y$.

R. Soluția rezultă din $\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$ cu $y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

115. $y' \cos 2x + 2y = 0$.

R. $y = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\, C$.

116. $n(x + a)y' + m(y + b) = 0$.

R. Revine la calculul integralelor $n \int \frac{dy}{y + b} = -m \int \frac{dx}{x + a}$, cu soluția generală $(x + a)^m (y + b)^n = C$.

117. $xy = (a - x)(y - b)y'$.

R. Se poate scrie $\int \frac{x\, dx}{a - x} = \int \frac{y - b}{y}\, dy$, soluția fiind $y^b (a - x)^a = Ce^{x+y}$.

118. $y' - ax^n(y^2 + 1) = 0$, $n \in N$.

R. Soluția rezultă din $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int = ax^n\, dx$ cu $y = \operatorname{tg} \left(\frac{a}{n + 1} x^{n+1} + C \right)$.

119. $y = x^2 y'^2$.

R. Avem $\frac{y'}{\sqrt{y}} = \pm \frac{1}{x}$, sau $\int y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \pm \int \frac{dx}{x}$ cu soluția generală $y = \frac{1}{4} (C \pm \ln x)^2$.

120. $y^2 + y'^2 = 1$.

R. Se poate scrie $y' = \sqrt{1 - y^2}$, de unde rezultă – prin integrare – soluția $y = \pm \sin (x + C)$.

121. $y - y' \cos^2 x = 1$.

R. Putem scrie $\int \frac{dy}{y - 1} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

122. $y = xy'^2 + y'^2$.

R. Avem $y' = \sqrt{\frac{y}{x + 1}}$, sau $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x + 1}}$ cu soluția $y = 2(\sqrt{x + 1} + C)$.

123. $xy + (x^2 + 1)y' = 0.$

R. Soluţia rezultă din $\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} + \int \frac{dy}{y} = 0$, cu $y = \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}}$.

124. $xy'(4 - x) + y(2 - x) = 0.$ R. $y = \frac{C}{\sqrt{|x(x - 4)|}}$.

125. $xy(1 + y^2) = (1 + x^2)y'.$

R. Revine la calculul integralelor $\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \int \frac{dy}{y(1 + y^2)}$ soluţia generală fiind $(1 - x^2)(1 + y)^2 = Cy^2$.

126. $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$

R. Soluţia rezultă din $\int \frac{dx}{x(1 + x^2)} = \int \frac{y\,dy}{1 + y^2}$ aceasta fiind $x^2 = C(1 + x^2)(1 + y^2)$.

127. $xyy' + (1 + y^2) = 0.$ R. $x^2(1 + y^2) = C.$

128. $x(1 - x^2)y' = y(1 - y^2).$ R. $y^2(1 - x^2) = Cx^2(1 - y^2).$

129. $x(1 - x^2)y' - (2x^2 - 1)y^2 = 0.$

R. Ecuaţia se poate scrie sub forma $\frac{dy}{y} = \frac{2x^2 - 1}{x(1 - x^2)}\,dx$, cu soluţia $y = \frac{1}{\ln C\sqrt{x^2(x^2 - 1)}}$.

130. $x^2(1 - y)y' + y'(1 + x) = 0.$ R. $\frac{x + y}{xy} + \ln\frac{y}{x} = C.$

131. $xy + \sqrt{1 - x^2}y' = 0.$

R. Din $\int \frac{dy}{y} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$ rezultă soluţia $y = ke^{\sqrt{1 - x^2} + C}$ $k \in R$.

132. $x(1 - y^2) + y(1 - x^2)y' = 0.$ R. $x^2 + y^2 = x^2y^2 + C.$

133. $x\sqrt{y^2 - 1} + yy'\sqrt{x^2 - 1} = 0.$

R. Din $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 - 1}} + \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$, rezultă soluţia $\sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1} = C.$

134. $x\sqrt{1 - y^2} + yy'\sqrt{1 - y^2} = 0.$ R. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = C.$

135. $x^2 + yy'y^{x+y} = 0.$

R. Se scrie $x^2e^{-x}\,dx - ye^y\,dy = 0$, de unde — prin integrare — rezultă soluţia $(x^2 + 2x + 2)e^{-x} - (y - 1)e^y = C.$

136. $(1 + x)y + \left(\frac{1}{y} - 1\right)y' = 0.$

R. Se scrie $(1 + x)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$, apoi se integrează.

137. $\frac{y}{x} y' + \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} = 0.$

R. Se poate scrie $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$

138. $2x(2y-1) = (x^2-2x+3)y' \sin y.$

R. Revine la calculul integralelor $\int \frac{2x\,dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{\sin y\,dy}{2\cos y - 1}$, cu soluția

$(x^2-2x+3)\sqrt{2\cos y - 1} = Ce^{\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}}.$

139. Se dă funcția $y = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ și se cere:

1° Să se găsească o relație diferențială de forma $f(x, y, y') = 0$.

2° Din rezultatul obținut la punctul 1° să se deducă rezolvarea ecuației diferențiale $f(x, y, y') = 0$, de la pct. 1°.

R. 1° Se observă că putem scrie $\frac{y+1}{y-1} = e^{\frac{1}{x}}$ și derivînd avem $\left(\frac{y+1}{y-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, sau $\frac{2y'}{(y-1)^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y-1}$, sau încă $2x^2y' + 1 = y^2$, (1).

2° Din (1) se deduce $\int \frac{dy}{y^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2}$ și după integrare se ajunge la soluția $y = \frac{Ce^{\frac{1}{x}}+1}{Ce^{\frac{1}{x}}-1}$.

140. Să se calculeze limitele următoarelor sume cu ajutorul integralelor

1° $S_1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

2° $S_2 = \frac{1^2}{2^3+n^3} + \frac{2^2}{4^3+n^3} + \ldots + \frac{n^2}{(2n)^3+n^3}$

3° $S_3 = \frac{1}{a(n-1)+b} + \frac{1}{a(n-2)+2b} + \ldots + \frac{1}{a+(n-1)b}.$

R. Se observă că $S_1 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{2}{1+\frac{n}{n}}\right]$ și considerînd funcția

$f(x) = \frac{1}{1+x}$, $\lim_{n\to\infty} S_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$

Pentru S_2 putem scrie:

$$S_1 = \frac{1}{n}\left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3} + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{n}\right)^3} + \ldots + \frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{2n}{n}\right)^3}\right]$$

şi luînd în considerare funcţia $f(x) = \dfrac{x^2}{1+8x^3}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+8x^3} = \frac{1}{12}\ln 3.$$

Pentru S_3, notăm $h = \dfrac{b-a}{n}$ şi avem:

$$S_2 = \frac{1}{n(a+h)} + \frac{1}{n(a+2h)} + \ldots + \frac{1}{n[a+(n-1)h]} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{a+h} + \frac{1}{a+2h} + \ldots + \frac{1}{a+(n-1)h}\right]$$

şi luînd în considerare funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$, putem scrie:

$$\lim_{n\to\infty} S_3 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}.$$ Dacă $a \Rightarrow b$,

$$S_3 = \frac{n-1}{na} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} S_3 = \frac{1}{a}.$$

141. Să se calculeze limita şirului

$$u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(an+1)(an+2)\ldots(an+n)},$$

pentru $n \to \infty$, cu $a > 0$.

R. Scoatem pe n de sub radical şi apoi logaritmînd, avem:

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(a+\frac{n}{n}\right)\right],$$

şi luînd în considerare funcţia $f(x) = \ln x$, se observă că putem scrie:

$$\lim_{n\to\infty}(\ln u_n) = \int_a^{a+1} \ln x\,dx = (a+1)\ln(a+1) - a\ln a - 1$$

$$\text{şi } u_n = \frac{(a+1)^{a+1}}{a^a}\cdot\frac{1}{e}.$$

142. Să se găsească limita produsului

$$P_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$$

cînd $n \to \infty$.

R. Caz particular al exercițiului precedent: logaritmăm și avem:

$$\ln P_n = -\ln n + \frac{1}{n}[\ln n + \ln(n+1) + \ldots + \ln(n+n)], \qquad (1)$$

și notînd $\ln(n+1) = \ln n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (1), devine:

$$\ln P_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right].$$

Acum, putem scrie:

$$\lim_{n\to\infty}(\ln P_n) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = \ln 4 - 1 \text{ și deci}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{\ln 4 - 1} = \frac{4}{e}.$$

Altfel. Se ține seamă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n-1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$

dacă $u_n > 0$ și dacă prima limită există.

În cazul de față avem:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\cdot\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{4}{e},$$

143. Să se calculeze limitele șirurilor:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$v_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2},$$

$$w_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1^2}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{2^2}{n^4}} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n^4}}.$$

R. Pentru u_n se consideră integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

Pentru v_n se consideră integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left| -\frac{1}{x+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Pentru w_n se consideră integrala

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}, \text{ observînd că}$$

$$w_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right].$$

Partea a treia

Capitolul VIII

Geometrie analitică

1\. Prin mijlocul O al laturii BC a unui triunghi isoscel ABC $(AB = AC)$ se duce o secantă variabilă care intersectează pe AB și AC respectiv în D și E.

Se cere locul geometric al punctului M de intersecție a dreptelor BE și CD.

R. Putem lua ca axe rectangulare pe AO și BC. Fie $A(0, b)$, secanta variabilă avînd ecuația $y = mx$.

Locul geometric este dreapta $y = b$ (paralelă la BC dusă prin A).

2\. Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy și un punct A așezat pe prima bisectoare a unghiului axelor. Fie A_1 și A_2 proiecțiile punctului A respectiv pe Ox și Oy, iar M și N punctele în care o dreaptă variabilă ce trece prin A întîlnește aceleași axe.

Să se arate că dreptele MA_2 și NA_1 și perpendiculara din O pe dreapta MN sînt concurente.

R. Fie $y - a = \lambda(x - a)$ ecuația unei drepte variabile ce trece prin punctul $A(a, a)$, situat pe prima bisectoare; se află coordonatele punctelor M și N și apoi se scriu ecuațiile dreptelor MA_2, NA_1 și a perpendicularei OP pe dreapta MN: apoi se arată că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{a(\lambda - 1)} & \dfrac{1}{a} & -1 \\ \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{a(\lambda - 1)} & -1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

este nul, probîndu-se astfel concurența celor 3 drepte.

3\. În planul unui triunghi ABC se consideră o dreaptă (Δ). Fie A', B', C' proiecțiile punctelor A, B, C pe dreapta (Δ) și A'', B'', C'' proiecțiile punctelor A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB.

Să se arate că dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sînt concurente într-un punct.

R. Considerăm pe (Δ) ca axa absciselor, coordonatele vîrfurilor A, B, C, fiind (x_i, y_i) cu $i = 1, 2, 3$. Se observă că abscisele punctelor A', B', C' sînt x_1, x_2, x_3, iar ecuațiile dreptelor $A'A''$, $B'B''$ și $C'C''$ sînt de forma $(A'A'')$: $(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - x_1(x_2 - x_3) = 0$.

Este ușor de observat că $(A'A'') + (B'B'') + (C'C'') = 0$ de unde rezultă concurența dreptelor respective.

4. Se dau două axe ortogonale Ox şi Oy şi un punct $P(a, b)$. Prin acest punct se duc două drepte perpendiculare variabile; una intîlneşte pe Ox în punctul A şi cealaltă întîlneşte pe Oy în punctul B. Să se arate că locul geometric al proiecţiei punctului P pe AB este o dreaptă.

R. Se notează $A(\alpha, 0)$ şi $B(0, \beta)$ cele 2 puncte variabile situate pe axele de coordonate; din condiţia de perpendicularitate a dreptelor AP şi BP se obţine relaţia $a\alpha + b\beta = a^2 + b^2$ (1). Notînd cu P' proiecţia lui P pe AB avem ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned}(AB)&: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0\\ (PP')&: y - b = \frac{\alpha}{\beta}(x - a)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Eliminarea parametrilor α şi β între relaţiile (1) şi (2) conduce la ecuaţia locului geometric a punctului P', care este $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ adică tocmai dreapta ce trece prin proiecţiile punctului P pe axele de coordonate.

5. Fie punctul $P(a, b)$ în raport cu două axe rectangulare Ox şi Oy.

1° Să se arate că există două drepte D_1 şi D_2 care trec prin P şi determină, împreună cu axele, triunghiuri cu aria k^2.

2° Fie A_1, B_1 punctele de intersecţie ale dreptei D_1 şi Ox respectiv Oy şi A_2, B_2 punctele de intersecţie ale dreptei D_2 cu Ox, Oy. Să se arate că dreptele A_1B_2 şi A_2B_1 nu-şi schimbă direcţia cînd k variază.

3° Să se determine locul geometric al punctului P astfel încît patrulaterul $A_1A_2B_1B_2$ să fie inscriptibil.

R. 1° $(D_1): \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} - 1 = 0$, $(D_2): \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} - 1 = 0$, unde $a_1 = \frac{k^2 - k\sqrt{k^2 - 2ab}}{b}$,

$$a_2 = \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 - 2ab}}{b}; \quad b_{1,2} = \frac{k^2 \pm k\sqrt{k^2 - 2ab}}{a}.$$

2° Se verifică uşor că $m_{B_1A_2} = m_{A_1B_2} = -\frac{b}{a}$. 3° $y = \pm x$.

6. În sistemul axelor de coordonate xOy se consideră dreptele AD şi BC determinate de punctele $A(0, 1)$, $B(0, m)$, $C(1, 0)$, $D(m, 0)$; se cere să se afle:

1° Locul geometric al punctului de întîlnire al dreptelor date, m fiind variabil.

2° Soluţia geometrică de la 1°.

R. 1° Ecuaţia dreptei AD este $x + my - m = 0$ (1)

iar a dreptei BC este $mx + y - m = 0$. (2)

Locul punctului P de întîlnire a dreptelor (1) şi (2) se află eliminînd pe m între ecuaţiile celor două drepte. Rezultă $x^2 - y^2 - x + y = 0$, sau $(x - y)(x + y - 1) = 0$, de unde $x - y = 0$, adică prima bisectoare şi $x + y - 1 = 0$, perpendiculara pe prima bisectoare în P. Dar $x + y - 1 = 0$ este ecuaţia dreptei AC. Locul geometric este AC în cazul particular $m = 1$.

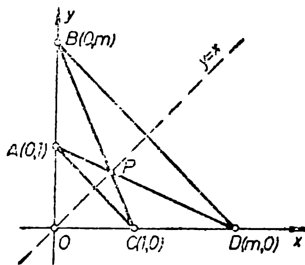


Fig. VIII — 6

aceasta avînd loc cînd dreptele AD și BC se confundă, situație în care toate punctele dreptei AC pot fi considerate ca puncte de intersecție a celor două drepte. În consecință, locul veritabil este $x - y = 0$, pe lîngă care apare și $x + y - 1 = 0$, care rezultă dintr-o nedeterminare.

2° Figura ABCD este un trapez isoscel în care P este punctul de intersecție al diagonalelor AD și BC (Fig. VIII-6); deci P se găsește pe axa de simetrie care este prima bisectoare a axelor coordonate.

7. În planul π se iau două puncte fixe P, Q și o dreaptă (Δ) perpendiculară pe PQ.

Prin P se duc două drepte perpendiculare variabile, care întîlnesc pe (Δ) în A și B.

Se cere locul geometric al proiecției A' a punctului A pe dreapta QB.

R. Se poate lua ca axă a absciselor chiar PQ, iar ca axă a ordonatelor dreapta (Δ) și notînd $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ se găsește că locul punctului A' este $q(x^2 + y^2) + (p^2 - q^2)x - p^2q = 0$, adică un cerc cu centrul pe dreapta PQ și care trece prin Q.

8. În planul axelor de coordonate xOy se iau 2 puncte fixe $A(a, 0)$ și $B(0, b)$, iar prin O se duce o secantă variabilă (Δ). Fie P și Q proiecțiile punctelor A și B pe dreapta (Δ).

Se cere locul geometric al punctului M, mijlocul segmentului PQ.

R. Fie $y = \lambda x$ ecuația dreptei (Δ), coordonatele lui M sînt: $x_M = \dfrac{a + \lambda b}{2(1 + \lambda^2)}$; $y_M = \dfrac{\lambda(a + \lambda b)}{2(1 + \lambda^2)}$; prin eliminarea parametrului λ se ajunge la cercul de ecuație $x^2 + y^2 - \dfrac{a}{2}x - \dfrac{b}{2}y = 0$ (care trece prin O și mijloacele segmentelor OA și OB).

9. Se consideră două axe perpendiculare și un punct M variabil în planul acestora. Fie P și Q proiecțiile lui M pe cele două axe; se duc perpendicularele PR și QS pe OM. Prin punctul R se duce paralela la Ox și prin S paralela m la Oy, fie N punctul de întîlnire al acestora. Se cere:

1° Să se calculeze coordonatele lui N în funcție de cele ale punctului M.

2° Să se calculeze coordonatele punctului M în funcție de acelea ale lui N.

3° Să se găsească locul geometric al punctului N cînd M se deplasează pe o dreaptă dată.

4° Să se găsească locul geometric al punctului N cînd M descrie un cerc ce trece prin originea axelor de coordonate.

R. Se notează cu (x', y') și (X, Y) coordonatele punctelor M și N; avem ecuațiile:

$$(OM): xy' - x'y = 0 \qquad (1)$$

$$(PR): xx' + yy' - x'^2 = 0 \qquad (2)$$

$$(QS): xx' + yy' - y'^2 = 0 \qquad (3)$$

Rezolvînd sistemul format din (1) și (3) rezultă abscisa punctului N, iar din rezolvarea sistemului format din ecuațiile (1) și (2) se obțin coordonatele lui N:

$$X = \frac{x'y'^2}{x'^2 + y'^2}, \quad Y = \frac{x'^2y'}{x'^2 + y'^2}, \tag{4}$$

din (4) deducîndu-se ușor

$$x' = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad y' = \frac{X^2 + Y^2}{Y}.$$

Dacă M se deplasează pe dreapta $ax + by + c = 0$, N descrie curba $c(x^2 + y^2) + (ay + bx)xy = 0$, iar cînd M se deplasează pe cercul $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$, punctul N descrie curba $2(ay + bx) + xy = 0$.

10. Se dau punctele $A(a - b,\ b - c)$, $B(b - c,\ a - b)$ și se cere:

1° Să se găsească tăieturile dreptei AB pe axele de coordonate. Explicație.

2° Să se calculeze analitic aria triunghiului format de tăieturile dreptei pe axe și dreapta AB.

3° Condiția ca aria de la 2° să fie nulă. Explicație.

4° Ecuația cercului AOB, O fiind originea axelor de coordonate.

5° Tangenta la cercul de la 4° în O.

R. 1° Ecuația dreptei AB este $x + y - a + c = 0$, tăieturile fiind $x = y = a - c$. Punctele A și B fiind simetrice față de prima bisectoare, dreapta AB este perpendiculară pe această bisectoare și în consecință tăieturile pe axe sînt egale.

2°—3° Aria triunghiului AOB este $S = \frac{1}{2}(a - c)^2$ și condiția ca această arie să fie nulă este $a = c$; în acest caz dreapta AB este chiar bisectoarea a doua a axelor de coordonate.

4° Ecuația cercului AOB este de forma $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y = 0$ (centrul acestui cerc fiind pe prima bisectoare).

Punînd condiția ca acest cerc să treacă prin $A(a - b,\ b - c)$ se găsește:

$$\alpha = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2}{2(a - c)},$$

5° Tangenta în O la cercul de la 4° este bisectoarea a doua, ceea ce era de așteptat, dat fiind că centrul cercului se află pe prima bisectoare.

11. Se consideră un triunghi ABC înscris în cercul cu centrul în O și raza R. Să se demonstreze că tangentele în A, B și C la cercul respectiv întîlnesc prelungirile laturilor BC, CA și AB în 3 puncte colineare.

R. În sistemul rectangular xOy se consideră un cerc cu centrul în O și se notează cu x_i și y_i (cu $i = 1, 2, 3$) coordonatele vîrfurilor A, B, C.

Ecuația tangentei în A la cercul O este

$xx_1 + yy_1 - R^2 = 0$, iar ecuația dreptei BC este:

$(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$; coordonatele punctului M de intersecție a tangentei în A la cerc cu dreapta BC (prelungită), sînt:

$$x_M = \frac{(x_2 - x_3)R^2 - (x_2y_3 - x_3y_2)y_1}{(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1}, \quad y_M = \frac{(y_2 - y_3)R^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)x_1}{(x_2 - x_3)x_1 + (y_2 - y_3)y_1};$$

În mod asemănător se scriu și coordonatele punctelor N și P de intersecție ale celorlalte 2 tangente în B și C la cerc cu CA și AB.

Este ușor de arătat că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$$ este nul (se adună liniile II și III la linia I).

12. Într-un cerc dat se iau doi diametri perpendiculari AA', BB' și un punct C variabil pe cerc. Dreapta BC întîlnește pe AA' în D, iar $B'C$ întîlnește paralela la BB' dusă prin D, în punctul M.

Se cere locul geometric al punctului M.

R. Fie cercul de ecuație $x^2 + y^2 - b^2 = 0$, cu $B(b, 0)$, ecuația dreptei BC fiind $y = \lambda(x - b)$, unde λ este un parametru variabil real.

Coordonatele punctului C sînt

$$x_c = \frac{b(\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 1}, \quad y_c = \frac{-2b\lambda}{\lambda^2 + 1},$$ iar ordonata lui D este $-\lambda b$. Se scriu ecuațiile dreptelor BC și DM și se elimină λ între aceste ecuații obținîndu-se parabola de ecuație $y^2 - b(x + b) = 0$ (cu vîrful în B').

13. În planul xOy se ia un punct $P(a, b)$ care se proiectează în A pe Ox și în B pe Oy.

Un cerc oarecare trecînd prin O și P taie pe Ox în C și pe Oy în D. Fie M intersecția dreptelor AB și CD.

Să se demonstreze că dreapta PM este perpendiculară pe CD.

R. Se ia $C(c, 0)$ și R = raza cercului respectiv: coordonatele punctului D sînt: $x_D = 0$, $y_D = \dfrac{R^2 - ac}{b}$, iar ecuația cercului ce trece prin O și P este

$$x^2 + y^2 - cx + \frac{ac - R^2}{b} y = 0.$$

Se scriu apoi ecuațiile dreptelor CD și AB și apoi se obțin coordonatele punctului

$$M \cdot x_M = \frac{ca^2}{R^2} \cdot y_M = \frac{b(R^2 - ac)}{R^2},$$ coeficientul unghiular al dreptei PM fiind $m_{PM} = \dfrac{bc}{R^2 - ac}$ etc.

14. Se consideră un sistem de coordonate în plan și un paralelogram variabil, ale cărui laturi trec respectiv prin cîte un punct fix; una, prin punctul $A(-2, 0)$; a doua, prin punctul $B(0, 0)$; a treia, prin $C(1, 0)$; iar a patra, prin $D(4, 0)$, astfel încît A, C să fie situate pe laturi opuse ale paralelogramului.

1° Să se arate că fiecare diagonală a acestui paralelogram trece printr-un punct fix M, iar cealaltă printr-un punct fix N.

2° Să se arate că M și N sînt situate pe dreapta $ABCD$ (axa Ox).

3° Se consideră cercurile care trec prin punctele fixe B, C și tangentele din M și N la aceste cercuri.

Care este locul geometric al punctelor de contact al acestor cercuri și tangente?

R. 1°—2° Fie P, Q, R, S vîrfurile paralelogramului, ecuațiile laturilor sînt:

$(PS): y = \alpha(x + 2)$ (trece prin A)

$(PQ): y = \beta x$, (trece prin B)

$(QR): y = \alpha(x - 1)$, (trece prin C)

$(RS): y = \beta(x - 4)$, (trece prin D)

α și β fiind parametri variabili.

Diagonala PR trece prin punctul fix $M(-8, 0)$, iar diagonala QS trece prin punctul fix $N\left(\frac{4}{7}, 0\right)$ de unde rezultă că M și N sînt pe axa xx', ca și A, B, C, D.

3° Ecuația cercurilor ce trece prin B și C este:
$(C_1) = x^2 + y^2 - x + \lambda y = 0$. Dacă $E(a, 0)$ este un punct exterior (C_1), atunci locul geometric al contactelor tangentelor duse din E la cerc este locul geometric al intersecției cercului (C_1) cu polara punctului E față de acest cerc, ecuația polarei deducîndu-se din

$$xx_0 + yy_0 - \frac{1}{2}(x + x_0) + \frac{\lambda}{2}(y + y_0) = 0 \qquad (1)$$

în care $x_0 = a$ și $y_0 = 0$, (1) devenind

$$(2a - 1)x + \lambda y - a = 0. \qquad (1')$$

Eliminarea lui λ între ecuația cercului (C_1) și (1') conduce la ecuația locului $x^2 + y^2 - 2ax + a = 0$, observîndu-se că dacă în loc de punctul E se ia $M(-8, 0)$, locul cerut este cercul $x^2 + y^2 + 16x - 8 = 0$, (din punctul N nu se pot duce tangente la cerc).

15. 1° Să se scrie ecuația unui cerc C care trece prin originea axelor de coordonate și prin punctele $P(1, 1)$ și $A(\alpha, 0)$.

• 2° Să se arate că centrul cercului C descrie o dreaptă, cînd A se deplasează pe Ox și că tangentele la cerc în O și P sînt concurente pe această dreaptă.

• 3° Să se calculeze unghiul dintre tangentele de mai sus și să se determine cercul C pentru care acest unghi este 45°.

R. 1° Ecuația cercului C este

$$x^2 + y^2 - \alpha x - (2 - \alpha)y = 0 \qquad (1)$$

centrul fiind în $C\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right)$.

2° Eliminînd pe α între coordonatele lui C se obține dreapta $x + y = 1$ (paralelă la bisectoarea a doua a axelor de coordonate). Tangenta la cercul (1) în O este $\alpha x + (2 - \alpha)y = 0$, (2) iar tangenta în $P(1, 1)$ este $(2 - \alpha)x + \alpha y - 2 = 0$. (3)

Pentru a arăta că dreptele (2), (3) și $x + y = 1$ sînt concurente, trebuie arătat că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-\alpha & \alpha & -2 \\ \alpha & 2-\alpha & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

este nul (condiția de compatibilitate a sistemului respectiv).

3° Notînd cu φ unghiul format de dreptele (2) și (3), avem $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-2)}$ și punînd condiția $\varphi = 45°$, rezultă $\alpha = 2 \pm \sqrt{2}$.

16. Se dau punctele $A(0, 4)$, $B(3, 5)$ și dreapta $3x + 2y - 10 = 0$ și se cere:

1° Ecuația cercului ce trece prin punctele date și are centrul pe dreapta dată.

2° Ecuația tangentei la cerc în B.

3° Aria triunghiului avînd ca vîrfuri: originea, punctul A și centrul cercului.

4° Locul mijloacelor coardelor variabile ce trece prin punctul B.

5° Soluția de la 4° pe cale geometrică.

R. 1° Ecuația cercului este de forma $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$; punînd condiția ca cercul să treacă prin A și B și apoi scriind că a, b verifică ecuația

$3x + 2y - 10 = 0$ se găsește $a = \frac{8}{3}$, $b = 1$, $c = -8$. Ecuația cercului este deci

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - 2y - 8 = 0. \qquad (1)$$

2° Tangenta în B are ecuația $x + 12y - 63 = 0$.

3° Aria triunghiului cu vîrfurile în 0, A și $C\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ este $\frac{16}{3}$.

4° Fie $M(\alpha, \beta)$ un al doilea punct în care o secantă variabilă ce trece prin $B(3, 5)$ intersectează cercul (1). Mijlocul lui BM are coordonatele $x = \frac{3 + \alpha}{2}$, $y = \frac{5 + \beta}{2}$ de unde rezultă $\alpha = 2x - 3$ și $\beta = 2y - 5$. Scriind că α și β verifică ecuația cercului (1) avem $(2x - 3)^2 + (2y - 5)^2 - \frac{16}{3}(2x - 3) - 2(2y - 5) - 8 = 0$, sau efectuînd calculele obținem cercul

$$x^2 + y^2 - \frac{17}{3}x - 6y + 13 = 0.$$

Altfel. Ecuația unei secante variabile ce trece prin B este $y - 5 = \lambda(x - 3)$. (2)
Eliminînd pe y între (1) și (2) obținem ecuația

$$(1 + \lambda^2)x + 2\left(-3\lambda^2 + 4\lambda - \frac{8}{3}\right)x + 9\lambda^2 - 24\lambda + 7 = 0. \qquad (3)$$

Fie x_1, x_2 rădăcinile acestei ecuații; coordonatele mijloacelor coardelor variabile ce trec prin B sînt:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9\lambda^2 + 12\lambda + 8}{3(1 + \lambda^2)}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} =$$

$$= \frac{\lambda(x_1 - 3) + 5 + \lambda(x_2 - 3) + 5}{2} = \frac{3\lambda^2 - \lambda + 15}{3(1 + \lambda^2)}. \qquad (3)$$

Eliminarea lui λ între relațiile (3) se face luînd ca necunoscută auxiliară $\alpha = \lambda^2 + 1$. (4)
Înlocuind (4) în (3) și rezolvînd în raport cu λ și α se obține

$$\alpha = -\frac{145}{3(x - 12y + 9)}, \quad \lambda = \frac{12x + y - 37}{x - 12y + 9}. \qquad (5)$$

Înlocuind (5) în (4) și efectuînd toate calculele, obținem cercul: $x^2 + y^2 - \frac{17}{3}x - 6y + 13 = 0$. (6)

5° Locul mijloacelor coardelor variabile ce trec printr-un punct fix situat pe un cerc (C) dat, este un alt cerc tangent interior cu (C) și trecînd prin punctul fix și centrul cercului (C), avînd raza egală cu jumătate din aceea a cercului (C).

• 17. Se consideră un sistem de axe dreptunghiulare xOy și o dreaptă ale cărei tăieturi pe axele de coordonate sînt $OA = a$ și $OB = b$. Prin mijlocul C al lui AB se duce o perpendiculară pe AB, care taie axa Ox în D. Se cere:

1° Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului BCD.

2° Să se arate că locul centrului acestui cerc, cînd punctul B se deplasează pe Oy, iar A rămîne fix, este o parabolă ale cărei elemente se vor determina.

3° Să se arate că directoarea acestei parabole este tangentă tuturor cercurilor de la 1°.

R. 1° $(CD): y - \frac{b}{2} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$, $D\left(\frac{a^2 - b^2}{2a},\ 0\right)$; centrul cercului este în C' $\left(\frac{a^2 - b^2}{4a},\ \frac{b}{2}\right)$, raza $R^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{4a}\right)^2 + \frac{b^2}{4} = \left(\frac{a^2 + b^2}{4a}\right)^2$ iar ecuația cercului este

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{2a}\,x - by = 0.$$

2° Locul lui C' se află eliminînd pe b între coordonatele acestuia, obținîndu-se $y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ax$, adică o parabolă cu vîrful în punctul $P\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$ directoarea acesteia fiind dreapta $x = \frac{a}{2}$.

3° Dreapta $x = \frac{a}{2}$ este tangentă la cercurile 1°, deoarece înlocuind pe x cu $\frac{a}{2}$ în 1°, ecuația respectivă devine $\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = 0$.

18. Extremitățile $P(u, 0)$ și $Q(0, v)$ ale unui segment de lungime constantă, alunecă pe axele de coordonate xOy.

1° Să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului OPQ și să se afle locul centrului acestui cerc.

2° Să se studieze variația ariei triunghiului OPQ.

3° Să se găsească locul cerut la punctul 1° numai cu ajutorul geometriei plane și maximul ariei OPQ fără a întrebuința derivatele.

R. 1° Cercul OPQ are centrul pe mijlocul lui PQ (triunghiul POQ fiind dreptunghic în O)

Coordonatele lui $C: x = \frac{u}{2},\ y = \frac{v}{2}$.

Ecuația cercului C este $\left(x - \frac{u}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{v}{2}\right)^2 = r^2$, unde $r^2 = \frac{u^2 + v^2}{4}$, sau $x^2 + y^2 - ux - vy = 0$.

Locul centrului C se află eliminînd u și v între $x = \frac{u}{2}$, $y = \frac{v}{2}$ și $u^2 + v^2 = k^2$ (lungimea segmentului PQ este constantă). Se găsește locul $x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$ adică un cerc cu centrul în origine și raza egală cu $PQ/2$.

2° Aria triunghiului APQ este $S = \frac{uv}{2} = \frac{1}{2} v \sqrt{k^2 - v^2}$, $(u^2 + v^2 = k^2)$.

Variația lui A este în tabloul de mai jos:

v	0			$k\sqrt{2}/2$			k
S'		+	+	0	−	−	|
S	0	↗		$(k/2)^2$		↘	0

graficul rezultînd imediat.

3° Se observă că OC este mediană în triunghiul dreptunghic POQ și că lungimea acestei mediane este constantă și egală cu $k/2$; prin urmare locul lui C este un cerc cu centrul în O și raza $l = k/2$.

Se știe că produsul $P = u \cdot v$ este maxim în cazul $u^2 + v^2 = k^2$ cînd $u = v$; ținînd seama de aceasta se regăsesc rezultatele de la punctul 2°.

19. Se dă un cerc raportat la un diametru Ox și tangent la Oy. Într-un punct M variabil pe cerc se duce o tangentă, care taie pe Ox în T și pe Oy în T_1. Să se afle:

1° Locul punctului de intersecție al dreptei OM cu paralela prin T_1 la Ox.

2° Locul intersecției dreptei OM cu paralelele din T la Oy.

3° Să se studieze și să se reprezinte grafic cele două locuri.

R. 1° Ecuația cercului cu centru în $C(a, 0)$ este $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, iar tangenta într-un punct $M(\alpha, \beta)$ de pe cerc are ecuația $(\alpha - a)x + \beta y - ax = 0$, intersecțiile acesteia cu axele de coordonate fiind în: $T\left(\frac{a\alpha}{\alpha - a}, 0\right)$ și $T_1\left(0, \frac{a\alpha}{\beta}\right)$ (unde α, β sînt parametri variabili).

Ecuația dreptei OM este $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, iar paralela în T_1 la Ox este $y = \frac{a\alpha}{\beta}$; eliminarea lui α și β între aceste ultime 2 relații conduce la $y^2 = ax$, adică o parabolă.

2° Paralela în T la Oy are ecuația $x = \frac{a\alpha}{\alpha - a}$; locul lui P este hiperbola echilateră $\frac{(x - a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{a} - 1 = 0$, cu centrul în C $(a, 0)$.

20. În planul xOy se iau pe axa absciselor două puncte fixe A și A', iar pe axa ordonatelor un alt punct fix B. Fie M un punct variabil pe Ox. Se cere:

1° Să se scrie ecuațiile cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și $A'BM$, precizîndu-se coordonatele centrelor C, C' ale acestor cercuri, razele R și R' precum și distanța centrelor CC'.

2° Să se arate că dacă M se deplasează pe Ox atunci punctele C, C' descriu fiecare cîte o dreaptă, iar raportul R/R' rămîne constant.

3° Să se scrie ecuația dreptei CC' și să se arate că printr-un punct P al planului xOy trec două asemenea drepte. Să se găsească locul punctului P astfel încît aceste drepte să fie perpendiculare.

R. 1° Fie $A(a, 0)$, $A'(a', 0)$; $B(0, b)$, $M(m, 0)$ punctele considerate.

Ecuația cercului ABM este

$$x^2 + y^2 - (a + m)x - \frac{b^2 + am}{b} y + am = 0, \qquad (1)$$

iar aceea a cercului $A'BM$ se obține din (1) înlocuind pe a cu a'.

2° Coordonatele lui C sînt $x_c = \dfrac{m + a}{2}$, $y_c = \dfrac{ma + b^2}{2b}$, **(2)**

iar cele ale lui C' se obțin din (2) înlocuind pe a cu a'.

Raportul razelor este $\dfrac{R}{R'} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{a'^2 + b^2}}$ = constant.

3° Distanța centrelor este $CC' = \dfrac{(a - a')^2}{4b^2} \cdot (b^2 + m^2)$.

Din eliminarea parametrului m între coordonatele punctelor C și C' (în relațiile de forma (2)), rezultă ecuațiile locurilor geometrice respective adică

$$\left.\begin{aligned} 2ax - 2by - (a^2 - b^2) = 0 \\ 2a'x - 2by - (a'^2 - b^2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

relațiile (3) reprezentînd mediatoarele segmentelor AB, $A'B$.

Ecuația dreptei CC' este

$2mx - 2by + b^2 - m^2 = 0$ (4), care în raport cu m este de gradul al doilea. Deci, printr-un punct P al planului trec două drepte de forma (4).

Ca aceste drepte să fie perpendiculare este necesar ca $\dfrac{m_1}{b} \cdot \dfrac{m_2}{b} = -1$, unde m_1 și m_2 sînt rădăcinile ecuației (4). Dar această ultimă relație este echivalentă cu $y = 0$, de unde rezultă că locul lui P este chiar axa xx'.

21. Se dau două cercuri C_1, C_2 tangente în origine și așezate în dreapta axei Oy, avînd razele r_1, r_2. Se cere:

1° Coordonatele punctelor M și N unde o dreaptă variabilă ce trece prin origine taie respectiv cercurile C_1, C_2.

2° Să se arate că tangentele în M și N la cercurile respective sînt paralele.

3° Locul geometric al mijlocului segmentului MN.

4° Soluția geometrică pentru locul de la 3°.

R. 1° Ecuațiile celor două cercuri sînt:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2r_1x = 0, \quad (C_2): x^2 + y^2 - 2r_2x = 0.$$

Dacă $y = mx$ este ecuația dreptei variabile ce trece prin originea axelor de coordonate, coordonatele punctelor M și N (diferite de originea axelor) sînt

$$x_M = \frac{2r_1}{1 + m^2}, \; y_M = \frac{2mr_1}{1 + m^2}, \; x_N = \frac{2r_2}{1 + m^2}, \; y_N = \frac{2mr_2}{1 + m^2}.$$

Tangenta în M la cercul C_1 este

$$\frac{2r_1}{1 + m^2} x + \frac{2mr_1}{1 + m^2} y - r\left(x + \frac{2r_1}{1 + m^2}\right) = 0 \qquad (1)$$

iar tangenta în N la cercul C_2 este

$$\frac{2r_2}{1+m^2}x + \frac{2mr_2}{1+m^2}y - r_2x + \left(\frac{2r_2}{1+m^2}\right) = 0. \qquad (2)$$

Coeficientul unghiular al tangentei (1) este $m_M = \frac{m^2-1}{2m}$ iar acela al tangentei (2) este

$m_N = \frac{m^2-1}{2m}$, ceea ce arată că cele două tangente sînt paralele.

3° Coordonatele mijlocului P al segmentului MN sînt $x_p = \frac{r_1+r_2}{1+m^2}$, $y = \frac{m(r_1+r_2)}{1+m^2}$.

Eliminarea lui m între aceste două coordonate conduce la locul $x^2 + y^2 - (r_1 + r_2)x = 0$, ce reprezintă un cerc cu centrul în $C_3\left(\frac{r_1+r_2}{2}, 0\right)$.

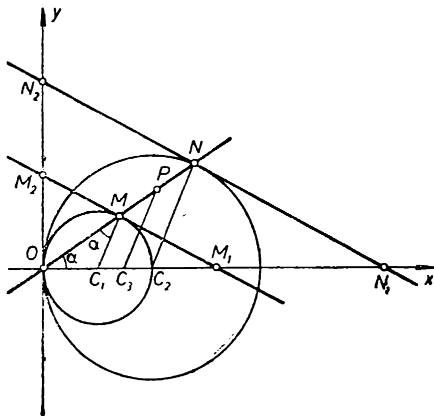


Fig. VIII—21

4° Soluție geometrică pentru punctele 2 și 3. Din figura VIII-21 se observă că triunghiurile OC_1M și OC_2N sînt isoscele și prin urmare unghiurile OMC_1 și ONC_2 sînt egale și deci unghiurile OMM_1, ONN_1, sînt egale. Rezultă că tangentele MM_1, NN_1 sînt paralele.

Figura C_1MNC_2 este un trapez; PC_3 este linie mijlocie în acest trapez și avem $PC_3 = \frac{C_1M + C_2N}{2} = \frac{r_1+r_2}{2} = \text{const.}$

Rezultă că locul lui P este un cerc cu centrul în C_3 și cu raza egală cu $\frac{r_1+r_2}{2}$.

22. Se consideră un sistem de axe xOy în plan și două cercuri C_1, C_2 cu centrele în originea axelor de coordonate, de raze $R_1 = 2$ și $R_2 = 3$.

O semidreaptă cu originea O întîlnește cercul C_1 în P_1 și cercul C_2 în P_2. Se consideră perpendiculara din P_2 pe Ox și simetricul M al punctului P_1 față de această perpendiculară.

1° Să se scrie ecuația locului geometric (L), descris de punctul M cînd semidreapta se rotește în jurul punctului O.

2° Fie S un punct al locului (L) și T un punct care împarte segmentul OS într-un raport dat k; să se afle locul geometric descris de T cînd S descrie locul (L).

3° Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba (L) în punctele sale de intersecție cu cercurile C_1 și C_2.

4° Fie A și B două puncte de pe curba (L), astfel încît OA și OB să fie perpendiculare, fie u unghiul pe care-l face OA cu Ox. Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$.

R 1° Se notează cu φ unghiul de OP_1P_2 cu sensul pozitiv al axei $x'x$; coordonatele punctelor P_1 și P_2 fiind: $P_1(R_1 \cos\varphi, R_1 \sin\varphi)$, $P_2(R_2 \cos\varphi, R_2 \sin\varphi)$. Cum M este simetricul lui P_1 în raport cu perpendiculara dusă din P_2 pe Ox, avem $x_M = 2R_2 \cos\varphi - R_1 \cos\varphi$.

$$y_A = R_1 \sin\alpha.$$

Eliminarea lui φ între coordonatele lui M conduce la ecuația locului

$$(L): \frac{x^2}{(2R_2 - R_1)^2} + \frac{y^2}{R_1^2} - 1 = 0, \text{ adică o elipsă.}$$

2° Dacă notăm $S(x, y)$ și $T(X, Y)$, atunci avem $X = \frac{kx}{1+k}$ și $Y = \frac{ky}{1+k}$; scriind că S verifică ecuația elipsei obținută la pct. 1°, rezultă locul lui T:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{(2R_2 - R_1)k}{1+k}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{R_1 k}{1+k}\right)^2} - 1 = 0$$

adică tot o elipsă.

4° Dacă se consideră un punct A pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît OA să facă cu Ox un unghi θ, atunci coordonatele lui A sînt

$$x_A = \frac{\pm ab\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},$$

$$y_A = \frac{\pm ab\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}};$$

Coordonatele punctului B se obțin din cele ale lui A înlocuindu-se θ cu $90° + \theta$ (dreptele OA și OB fiind perpendiculare).

Se obține $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

23 Se consideră cercurile care trec prin două puncte fixe A și B.

1° Să se arate că locul geometric al extremităților diametrelor acestor cercuri, paralele cu dreapta AB, este o hiperbolă.

2° Dintre cercurile considerate să se determine acelea care se văd sub unghiuri drepte din focarele hiperbolei.

3° Să se calculeze lungimile segmentelor determinate de asimptotele hiperbolei pe tangentele în fiecare din punctele de intersecție ale ei cu unul oarecare dintre cercurile considerate.

R. 1° Se scrie ecuația cercurilor ce trec prin A, B.

Ecuația locului: $x^2 - y^2 = a^2$, adică o hiperbolă echilaterală cu vîrfurile în A și B.

2° Cercul $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

3° Mărimea segmentelor determinate de asimptote pe tangentele în A și B este $2a$; iar mărimea segmentelor determinate de asimptote pe tangentele în M și N este aceeași, adică $2\sqrt{a^2 + 2\lambda^2}$.

● **14.** Se consideră cercul: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ și punctul M ($R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$) situat pe acest cerc. Fie AA' și BB' diametrii situați pe axele Ox și Oy. Dreptele MA și MA' taie axa Oy în C și D, iar dreptele MB și MB' taie axa Ox în E și F.

1° Să se demonstreze că punctele C, D, E, F sînt așezate pe același cerc și să se scrie ecuația acestui cerc.

2° Să se găsească locul geometric al centrului acestui cerc, presupunînd că M descrie cercul dat.

R. 1° Pentru a arăta că aceste puncte sînt conciclice, trebuie să demonstrăm că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

este nul, unde $(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$ sînt coordonatele punctelor C, D, E, F.

2° Locul geometric respectiv are ecuația:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}.$$

25. Fie $C_1(a, 0)$ centrul cercului (C_1) tangent axei Oy și $C_2(0, b)$ centrul unui al doilea cerc (C_2) tangent axei $Ox (a > b)$.

Prin originea O a axelor de coordonate se duce o dreaptă variabilă (D) care taie cercurile (C_1), (C_2) în A_1 și A_2. Se cere:

1° Să se afle locul geometric al punctului M de pe segmentul A_1A_2 definit prin relația $MA_1/MA_2 = k$.

2° Să se demonstreze apoi că punctele C_1, C_2, C_3 — unde C_3 este centrul locului de la 1° — sînt coliniare.

3° Să se calculeze lungimea segmentului A_1A_2 în funcție de coeficientul unghiular al dreptei (D) și apoi să se determine acest coeficient unghiular astfel încît să avem $A_1A_2 = l$ (l fiind o lungime dată).

R. 1° Ecuațiile celor două cercuri sînt:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2ax = 0; \quad (C_2): x^2 + y^2 - 2by = 0.$$

Fie $y = \lambda x$ dreapta variabilă ce trece prin O.

Coordonatele punctului A_1 sînt soluțiile diferite de zero ale sistemului: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

$y = \lambda x$, unde $x = \dfrac{2a}{\lambda^2 + 1}$ și $y = \dfrac{2a\lambda}{\lambda^2 + 1}$, iar coordonatele lui A_2 sînt soluțiile diferite de zero ale sistemului $x^2 + y^2 - 2by = 0$, $y = \lambda x$, unde $x = \dfrac{2b\lambda}{\lambda^2 + 1}$ și $y = \dfrac{2b\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$.

Coordonatele lui M sînt:

$$x = \frac{2(a - bk\lambda)}{(\lambda^2 + 1)(1 - k)} \text{ și } y = \frac{2\lambda(a - bk\lambda)}{(\lambda^2 + 1)(1 - k)}. \quad (1)$$

Locul lui M se află eliminînd pe λ între coordonatele (1). Se vede ușor că $\lambda = y/x$, valoare care înlocuită în oricare din relațiile (1) conduce la ecuația

$$x^2 + y^2 - 2\frac{ax}{1 - k} + 2\frac{bky}{1 - k} = 0, \quad (2)$$

care reprezintă un cerc cu centrul în punctul $C_3\left(\dfrac{a}{1 - k}, -\dfrac{bk}{1 - k}\right)$, $k \neq 1$.

2° Pentru ca punctele C_1, C_2, C_3 să fie coliniare este necesar ca

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ \dfrac{a}{1-k} & \dfrac{bk}{1-k} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ ceea ce se dovedește cu ușurință.

Se mai poate dovedi coliniaritatea celor trei puncte arătînd că coordonatele lui C_3 verifică ecuația dreptei (A_1A_2), $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

3° Avem două drepte $y = \pm \frac{R-1}{2\sqrt{Rr}}x$.

26. Se dau dreptele (D_1): $3x - 4y + \mu = 0$ și (D_2): $4x + 3y - 3\lambda = 0$, λ și μ fiind parametri variabili.

1° Să se arate că patrulaterul format de axele de coordonate și dreptele (D_1), (D_2) este inscriptibil.

2° Să se scrie ecuația cercului circumscris acestui patrulater.

3° Parametrii λ și μ verificînd relația $\mu^2 + 96\lambda = 0$ ecuația precedentă (de la punctul 2°) reprezintă o familie de cercuri. Să se afle locul geometric al centrelor acestor cercuri.

4° Să se construiască locul geometric de la punctul 3°.

R. 1° Se observă că $(D_1) \perp (D_2)$ și prin urmare patrulaterul $AOBD$ este inscriptibil ($\hat{D} + \hat{O} = 180°$). Centrul cercului este pe mijlocul C al segmentului AB (diametrul cercului). Intersectînd dreptele (D_1) și (D_2) cu axele se determină coordonatele punctelor A și B și apoi ale lui $C: x = \frac{3\lambda}{8}$, $y = \frac{\mu}{8}$.

2° Ecuația cercului $AODB$ este:

$$\left(x - \frac{3\lambda}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{\mu}{8}\right)^2 = \frac{\frac{\mu^2}{16} + \frac{9\lambda^2}{16}}{4},$$ sau efectuînd calculele $x^2 + y^2 -$

$$-\frac{3\lambda}{4}x - \frac{\mu}{4}y = 0.$$

3°—4° Coordonatele centrului cercului (1) fiind

$$x = \frac{3\lambda}{8}, \quad y = \frac{\mu}{8} \tag{2}$$

locul geometric al lui C se află eliminînd pe λ și μ între relațiile (2) și $\mu^2 + 96\lambda = 0$; se găsește parabola $y^2 = -4x$.

27. Fie M un punct variabil pe o elipsă avînd axele AA' și BB'.

Să se demonstreze că axul radical al cercurilor MAA' și MBB' este tangent în M la elipsă.

R. Ecuațiile cercurilor MAA', MBB' sînt:

$$\left.\begin{aligned} & x^2 + y^2 + \frac{a^2 - x_0^2 - y_0^2}{y_0}y - a^2 = 0 \\ & x^2 + y^2 + \frac{b^2 - x_0^2 - y_0^2}{x_0}x - b^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

unde (x_0, y_0) sînt coordonatele punctului M. Scriind apoi că M se găsește pe elipsă, ecuațiile (1) devin:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{c^2}{b^2} y_0 y - a^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{c^2}{a^2} x_0 x - b^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

axul radical al cercurilor (2) fiind tocmai tangenta la elipsă în M.

28. Se dau 2 cercuri cu centrele în ω_1 și ω_2 tangente în A și se duce în primul cerc o coardă variabilă AB și în al doilea o coardă AC perpendiculară pe AB. Se cere:

1° Locul geometric al proiecției punctului A pe BC.

2° Locul geometric al mijlocului M al segmentului BC.

3° Locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC.

R. 1° Se poate lua linia centrelor $\omega_1\omega_2$ chiar axa absciselor, iar axa yy' tangentă în A la cele 2 cercuri; notînd $\omega_1(a, 0)$, $\omega_2(b, 0)$ centrele cercurilor respective, ecuațiile acestora sînt: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ și $x^2 + y^2 - 2bx = 0$. Dacă se consideră $y = \lambda x$ ecuația dreptei AB, atunci ecuația dreptei AC este $x + \lambda y = 0$.

Se găsesc coordonatele:

$$x_B = \frac{2a}{1+\lambda^2}, \; y_B = \frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}; \; x_c = \frac{2b\lambda^2}{1+\lambda^2}, \; y_c = -\frac{2b\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Ecuația dreptei BC este $(a + b)\lambda x - (a - \lambda^2 b)y - 2b\lambda = 0$ iar aceea a perpendicularei pe BC este $y = \dfrac{b\lambda^2 - a}{(a+b)\lambda} x$ (cu $a + b \neq 0$).

Eliminarea parametrului λ între aceste două relații conduce la locul geometric de ecuație $x^2 + y^2 - \dfrac{2b}{a+b} x = 0$, adică un cerc cu centrul pe xx'.

2° Locul lui M este dat de

$(x - a)[(x - a)(x - b) + y^2] = 0$, adică o dreaptă și un cerc.

3° Locul geometric al punctului G este

$(3x - 2a)[(3x - 2a)(3x - 2b) + 9y^2] = 0$, adică tot o dreaptă și un cerc.

29. Într-o elipsă se duce o coardă BC paralelă cu axa mare AA' și fie T proiecția vîrfului A pe dreapta BC.

1° Să se arate că

$$b^2 \cdot TB \cdot TC = a^2 \cdot TA^2,$$

unde a, b, sînt semiaxele elipsei.

2° Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor $A'B$, AM, unde M este mijlocul coardei $A'B$ (B de aceiași parte cu A).

R. 1° Se consideră elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, punctele: $B(\alpha, \beta)$, $C(-\alpha, \beta)$ și $T(a, \beta)$, parametrii variabili α, β verificînd ecuația elipsei $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$. (1)

2° Notînd $M(0, \beta)$, avem ecuațiile dreptelor:

$$\left.\begin{aligned} (A'B): y = \frac{\beta}{a+\alpha}(x + a) \\ (AM): y = -\frac{\beta}{a}(x - a) \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Din relațiile (2) aflăm pe α și β pe care le introducem în (1) și obținem locul

$$\frac{\left(x+\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2b\sqrt{3}}{3}\right)^2}-1=0$$

adică o elipsă cu centrul în $\left(-\frac{a}{3},\ 0\right)$, avînd axele $\frac{4a}{3}$ și $\frac{4b\sqrt{3}}{3}$.

30. Pe o elipsă se consideră punctele M și N; paralela prin M la BB' intersectează paralela din N la AA' în punctul J. Fie P intersecția normalei în M cu AA' și Q intersecția normalei în N cu BB'. Să se arate că punctele P, Q, J sînt coliniare.

R. Ecuația dreptei PQ este

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}-c^2=0$$

unde (x_1, y_1) sînt coordonatele punctului M; notînd cu (x_2, y_2) coordonatele punctului N, punctul J va avea coordonatele (x_1, y_2) care vor trebui să verifice ecuația dreptei PQ.

31. Se consideră o elipsă cu centrul O și de focare F și F'. Pentru fiecare punct M al elipsei se duce normala în M la elipsă, care intersectează axa y-ilor într-un punct P. Se cere:

1° Să se calculeze expresia $\frac{MP^2}{FM\cdot F'M}$, cînd punctul M se deplasează pe elipsă.

2° Să se găsească locul geometric descris de centrul cercului înscris triunghiului MFF' cînd M descrie elipsa dată.

R. 1° Se poate lua $M(a\cos\varphi\ \ b\sin\varphi)$; se scrie ecuația normalei în M la elipsă și se calculează apoi coordonatele punctului P. Se ține seamă că $FM=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-a\cos\varphi\right)$ și $F'M=$ $=\frac{c}{a}\left(a\cos\varphi+\frac{a^2}{c}\right)$.

2° Centrul I al cercului înscris în triunghiul FMF' se găsește la intersecția dreptelor: $y=\frac{bc\sin\varphi}{a+c}$ și $b(y-b\sin\varphi)\cos\varphi=a(x-a\cos\varphi)\sin\varphi$; eliminarea lui φ între aceste 2 ecuații conduce la locul lui I, care este $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2}-1=0$, adică o elipsă avînd axa mare FF'.

32. Prin originea axelor rectangulare xOy se duce o secantă variabilă care întîlnește elipsa $x^2+4y^2-4=0$ în punctele M, M'. Prin M se duce o tangentă la elipsă, care întîlnește axa xx' în punctul N. Se cere să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului OMN.

R. Locul este elipsa $\frac{x^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-1=0$.

33. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-1=0$.

1° Să se găsească punctele de pe elipsă în care tangentele respective fac cu axa Ox un unghi de 45° și să se scrie ecuația tangentei în unul din aceste puncte.

2° Se consideră un punct M variabil pe elipsă, care se unește cu extremitățile A și A_1 ale axei mari; să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului AMA_0.

R. 1° Ecuația tangentei într-un punct (x_0, y_0) de pe elipsă este $\frac{xx_0}{16} + \frac{yy_0}{4} - 1 = 0.$ (1)

Punem condiția ca coeficientul unghiular al dreptei (1) să fie egal cu 1; avem $-\frac{x_0}{4y_0} = 1$, de unde $x_0 = -4y_0$.

Dar punctul (x_0, y_0) se află pe elipsă, deci avem

$$x_0^2 + 4y_0^2 - 16 = 0. \quad (3)$$

Din (2) și (3) deducem $x_0 = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$ și $y_0 = \mp\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ecuația tangentei — de exemplu — în punctul $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ este $x - y + 2\sqrt{5} = 0$.

2° Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct variabil pe elipsa dată; locul geometric al ortocentrului triunghiului AMA_1 se află eliminînd pe α și β dintre ecuația dreptei $x = \alpha$ (una din înălțimi), a dreptei perpendiculară din A_1 pe MA (a doua înălțime) și relația:

$$\alpha^2 + 4\beta^2 - 16 = 0, \quad (4)$$

(M se găsește pe elipsă). Ecuația perpendicularei din A_1 pe MA este $y = \frac{4-\alpha}{\beta}(x+4)$; de unde rezută că $\beta = \frac{4-\alpha}{y}(x+4)$. (5)

Înlocuim în (5) pe α cu x și apoi pe α și β cu valorile obținute în (4). Se găsește elipsa

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{8^2} - 1 = 0.$$

34. Fie AA' axa mare a unei elipse cu centrul în originea axelor de coordonate xOy și M un punct variabil pe elipsă.

Se unește M cu A și A'. Să se afle:

1° Locul punctului P de întîlnire a dreptelor AP și $A'P$ ridicate perpendicular respectiv pe AM și $A'M$ în A și A'.

2° Locul ortocentrului H al triunghiului AMA', cînd M se deplasează pe elipsă.

3° Locul centrului de greutate al aceluiași triunghi.

R. 1° Fie $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, ecuația (1)

elipsei date și $M(\alpha, \beta)$ un punct variabil pe (1).

Perpendiculara în A' pe MA' are ecuația

$$y = -\frac{\alpha + a}{\beta}(x + a), \quad (2)$$

iar perpendiculara în A pe MA are ecuația

$$y = -\frac{\alpha - a}{\beta}(x - a). \quad (3)$$

Eliminarea lui α și β între (2) (3) și (1) conduce la

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} - 1 = 0, \text{ adică o elipsă.}$$

2° Locul ortocentrului H este aceeași elipsă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} - 1 = 0.$$

3° Locul centrului de greutate G este elipsa

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} - 1 = 0,$$

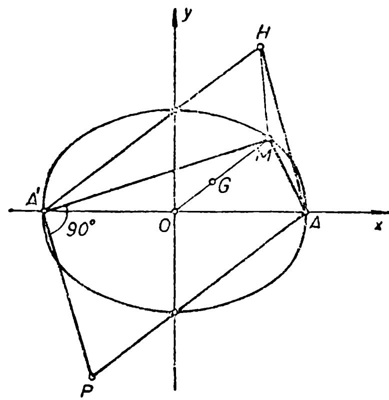


Fig. VIII — 34

Notă: S-a văzut că locul lui H este același cu al lui P; aceasta se explică observînd că patrulaterul $PAHA'$ (fig. VIII-34) este un paralelogram că H este simetricul lui P față de O (punctul de intîlnire al diagonalelor) și că prin urmare locul lui H este același cu al lui P.

35. Se dă elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$ și se cere:

1° Să se găsească m astfel ca dreapta $(D): mx - 2y + 5 = 0$ să fie tangentă la elipsă, determinîndu-se punctul de contact în acest caz.

2° Să se arate apoi că dreapta (D) este tangentă și cercului cu centrul în origine și avînd raza egală cu jumătate din distanța focală.

3° Să se studieze și să se reprezinte grafic variația puterii unui punct M mobil pe elipsă, în funcție de abscisa acestui punct, față de cercul cu centrul în punctul de intersecție al elipsei cu semiaxa Ox și avînd raza egală cu semiaxa mică a elipsei.

R. 1° Din ecuația dreptei (D) scoatem $y = \frac{mx+5}{2}$ și înlocuind în ecuația elipsei obținem

$$(16 + 9m^2)x^2 + 90\,mx + 81 = 0. \qquad (1)$$

Punînd condiția ca (1) să aibă o rădăcină dublă (discriminantul nul) obținem $m = \pm 1$. Avem deci dreptele: $(D_1): 2y = x + 5$ și $(D_2): 2y = -x + 5$. Punctele de contact ale celor două tangente cu elipsa sînt $\left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right), \left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

2° Cercul cu centrul în origine și raza egală cu $\sqrt{5}$ are ecuația $x^2 + y^2 = 5$.

Intersectînd cercul (2) cu dreapta $x - 2y + 5 = 0$ se obține $x_1 = x_2 = -1$ și $y_1 = y_2 = 2$, ceea ce arată că dreapta (D_1) este tangentă la cercul (2).

3° Fie $M\left(\alpha, \frac{2}{3}\sqrt{9 - \alpha^2}\right)$ un punct variabil pe elipsă. Ecuația cercului cu centrul în (3, 0) și raza $b = 2$, este

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0. \qquad (3)$$

Puterea lui M față de cercul (3) este $P = \alpha^2 + \frac{4}{9}(9 - \alpha^2) - 6\alpha + 5$, sau $P = \frac{1}{9}(5\alpha^2 - 54\alpha + 81)$.

Înlocuind în (4) P cu y și α cu x se obține $y = \frac{1}{9}(5x^2 - 54x + 81)$, care reprezintă o parabolă.

36. Dreapta $y = kx$ taie dreptele $x + y - 1 = 0$ și $x - y - 1 = 0$ în punctele P și Q; se cere:

1° Aria triunghiului format de aceste drepte.

2° Parametrul k fiind variabil se să găsească locul geometric al mijlocului M al segmentului PQ.

3° Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția loc geometric de la 2°.

R. 1° Intersectînd cele trei drepte se obțin punctele $P\left(\frac{1}{1+k}, \frac{k}{1+k}\right)$, $Q\left(\frac{1}{1-k}, \frac{k}{1-k}\right)$ și $A(1, 0)$. Aria triunghiului PAQ (dreptunghic în A) este

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1+k} & \frac{k}{1+k} & 1 \\ \frac{1}{1-k} & \frac{k}{1-k} & 1 \end{vmatrix} = \frac{k^2}{|1 - k^2|}, \quad k \neq 1 \pm 1, \qquad (1)$$

2° Mijlocul M al segmentului PQ are coordonatele

$$x = \frac{1}{1 - k^2} \quad y = \frac{k}{1 - k^2}. \qquad (2)$$

Locul geometric al lui M se află eliminînd pe k dintre relațiile (2). Prin împărțire se obține $k = \frac{y}{x}$; înlocuind această valoare în prima relație se obține ecuația

$$x^2 - y^2 - x = 0. \qquad (3)$$

care reprezintă o hiperbolă echilaterală cu vîrful în punctul $A'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ și semiaxele egale cu $\frac{1}{2}$.

Într-adevăr, (3) se scrie și astfel $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$, sau

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

37. Se dă hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = r^2$, cu centrul în originea axelor rectangulare xOy.

Se duce o dreaptă variabilă paralelă cu Ox și care întîlnește hiperbola în A și B și se notează cu P și Q vîrfurile hiperbolei; se unește B cu P și A cu O. Dreptele BP și AO se întîlnesc în M.

1° Se cere locul lui M, indicîndu-se elementele principale ale acestui loc.

2° Să se găsească locul geometric al lui N, punctul de intersecție al dreptelor AQ și BO, indicîndu-se elementele principale ale acestui loc.

3° Să se precizeze poziția curbelor obținute la 1° și 2°, față de cercul cu centrul în O și raza egală cu r, calculîndu-se aria cuprinsă între acest cerc și cele două curbe.

R. 1° Locul lui M este elipsa $\dfrac{\left(x-\dfrac{2r}{3}\right)^2}{\left(\dfrac{r}{3}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)^2}-1=0$ cu centrul în $\left(\dfrac{2r}{3}, 0\right)$.

2° Locul geometric al lui N este o elipsă simetrică cu aceea de la 1°, față de Oy.

3° Cele două elipse sînt tangente interioare cercului $x^2+y^2=r^2$.

Aria celor două elipse este $\dfrac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$, iar aria cuprinsă între aceste elipse și cercul respectiv este $\pi r^2\left(1-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

38. Se dau ecuația $xy = 2$ și punctele $A(2, 2)$ și $B(-2, -2)$.

1° Să se precizeze ce curbă reprezintă această ecuație și să se determine elementele sale (asimptote, vîrfuri, focare).

2° Să se scrie ecuația tangentei la această curbă în punctul $C(2, 1)$.

3° Se consideră pe curbă un punct mobil M de abscisă p. Să se calculeze în funcție de p distanțele MA și MB, apoi să se verifice că $MB - MA =$ $=$ const. Să se explice acest rezultat.

4° Să se determine intervalele în care k poate lua valori astfel ca dreptele fascicolului $y = -x + k$ să intersecteze curba $xy = 2$.

5° Dacă k este cuprins în intervalele corespunzătoare atunci o dreaptă oarecare $y = -x + k$ taie curba în două puncte P_1 și P_2. Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului P_1P_2, cînd k parcurge intervalele respective.

R. 1° Curba reprezintă o hiperbolă echilaterală cu vîrful în originea axelor de coordonate, avînd ca asimptote aceste axe, iar ca axă de simetrie prima bisectoare.

2° Ecuația tangentei este de forma $x_0y + y_0x = 4$, unde înlocuind se obține $x + 2y - 4 = 0$.

3° $MB - MA = 4$.

4° $k \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty)$.

5° Locul este axa de simetrie a hiperbolei, adică $y = x$.

39. Un dreptunghi variabil $DED'E'$ este înscris într-un triunghi ABC fix. Luînd baza BC și înălțimea triunghiului ca axe de coordonate, se cere:

1° Să se afle locul centrului dreptunghiului (analitic).

2° Să se studieze variația ariei acestui dreptunghi.

3° Să se trateze punctul 1, și respectiv 2, cu ajutorul geometriei plane și algebrei elementare (fără derivate).

R. 1° Fie $A(0, h)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$ vîrfurile triunghiului ABC; avem:

ecuația dreptei: $AC: x/c + y/h - 1 = 0$, sau

$$hx + cy - ch = 0 \tag{1}$$

și ecuația dreptei $AB: hx - by + bh = 0$ (2)

Fie $y = \alpha$ ecuația dreptei ED paralelă cu Ox; găsim

$E\left(\dfrac{b(\alpha-h)}{h}, \alpha\right)$, $D\left(\dfrac{c(h-\alpha)}{h}, \alpha\right)$. Coordonatele punctului I de intersecție a diagonalelor ED' și $E'D$ sînt:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{b(\alpha-h)}{h}+\frac{c(h-\alpha)}{h}\right] = \frac{(\alpha-h)(b-c)}{2h}, \text{ iar } y = \frac{\alpha}{2}.$$

Locul lui I este $2hx - 2(b - c)y + (b - c)h = 0$. **(3)**

Este ușor de observat că dreapta (3) trece prin mijloacele înălțimii AO și bazei BC a triunghiului dat.

2° Avem: $ED = \frac{b(\alpha - h)}{h} - \frac{c(h - \alpha)}{h} = \frac{h - \alpha}{h}(b + c)$, $(h > \alpha)$, iar aria dreptunghiului $EDD'E'$ este

$$S = \frac{x(h - \alpha)(b + c)}{h} \quad (4)$$

maximul ariei (4) fiind $S_{max} = \frac{(b + c)h}{4}$.

3° Notăm $BC = a$, $AO = h$, $A_1O = x$ și avem: $\frac{a}{ED} = \frac{h}{h - x}$, de unde $ED = \frac{a(h - x)}{h}$; Aria dreptunghiului $EDD'E'$ este

$$A = \frac{a(h - x)}{h}x = \frac{a}{h}(hx - x^2). \quad (5)$$

Funcția (5) — trinom de gradul al doilea în x — este maximă pentru $x = -\frac{b}{2a} = \frac{h}{2}$, avînd în acest caz $A_{max} = \frac{ah}{4}$ (jumătate din aria triunghiului ABC), adică același rezultat obținut la punctul 2°.

49. Pe o dreaptă care se rotește în jurul unui punct fix $P(a, 0)$ se consideră punctul A în care aceasta taie axa Oy și un punct B ales astfel încît $PA = AB$. Se cere:

1° Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a perpendicularei în A și AP cu paralela dusă la axa Ox prin B.

2° Să se demonstreze că cercul descris de MP ca diametru este tangent în A axei Oy.

R. 1. Ecuația dreptei PA este $y = m(x - a)$, avem deci $A(0, -ma)$, $B(-a, -2ma)$. Ecuația dreptei BM este

$$y = -2ma \quad (1)$$

iar a dreptei AM este

$$y + ma = -\frac{x}{m}. \quad (2)$$

Locul lui M se află eliminînd pe m între (1) și (2), obținem parabola $y^2 = 4ax$ **(3)** cu vîrful în O și focarul în $P(a, 0)$.

2° Cercul MAP are centrul în $C(\alpha, \beta)$ unde α și β sînt coordonatele mijlocului segmentului PM, avem $\alpha = \frac{a(1 + m^2)}{2}$, $\beta = -ma$. Raza cercului este $\frac{MP}{2} = \frac{a(m^2 + 1)}{2}$ și deci ecuația acestui cerc este

$$\left[b - \frac{a(1 + m^2)}{2}\right]^2 + (y + ma)^2 = \frac{a^2(m^2 + 1)^2}{4},$$

sau

$$x^2 + y^2 - a(m^2 + 1)x + 2may + m^2a^2 = 0. \quad (4)$$

Făcînd $x = 0$ în (4) obținem $(y + ma)^2 = 0$ adică cercul este tangent la Oy în A.

41. Se dă un punct fix $(a, 0)$ şi un punct $M(\alpha, \beta)$ variabil pe parabola $y^2 - 2px = 0$. Se duce prin A o dreaptă paralelă cu tangenta la parabolă în M; această dreaptă taie dreapta dusă prin focar şi M, în punctul N. Să se afle:

1° Locul geometric al punctului N.
2° Să se arate că locul de la 1° trece prin A.
3° Să se afle elementele locului de la punctul 1°.
4° Ecuaţia tangentei la acest loc dusă în punctul A.

R. 1° Tangenta în M la parabolă are ecuaţia

$$px - \beta y + p\alpha = 0. \tag{1}$$

Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi este paralelă cu (1) este

$$y = \frac{p}{\beta}(x - a), \tag{2}$$

iar a dreptei MF este $\beta x + \left(\frac{p}{2} - \alpha\right) y - \beta \frac{p}{2} = 0.$ (3)

Locul lui N se află eliminînd pe α şi β între (2), (3) şi relaţia $\beta^2 = 2p\alpha$ (M se află pe parabolă). Se obţine cercul

$$x^2 + y^2 - px + ap - a^2 = 0. \tag{4}$$

2° Cercul (4) trece prin $A(a, 0)$ deoarece coordonatele lui A verifică ecuaţia cercului.

3° Centrul cercului (4) este în $C\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ iar raza $r = a - \frac{p}{2} = AF$.

4° Ecuaţia tangentei la cerc în A este $x - a = 0$, ceea ce era de aşteptat, centrul cercului fiind pe Ox.

42. Se dă un punct fix $A(a, 0)$ şi un punct mobil $M(\alpha, \beta)$ pe parabola $y^2 = 4x$ şi se cere să se afle:

1° Elementele principale ale parabolei.
2° Ecuaţia tangentei la parabolă în punctul M.
3° Ecuaţia dreptei care trece prin A şi este paralelă cu tangenta de la 2°.
4° Ecuaţia dreptei care trece prin focarul parabolei şi prin M.
5° Locul geometric al punctului N de intersecţie al dreptelor 3° şi 4°. Să se demonstreze că locul geometric aflat este un cerc care trece prin A.
6° Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul A.

R. 1° Focarul parabolei în $F(1, 0)$, vîrful parabolei în originea axelor, Oy tangentă în vîrf, $x + 1 = 0$ ecuaţia directoarei.

2° Tangenta în M: $2x - \beta y + 2\alpha = 0.$ (1)

3° Ecuaţia dreptei ce trece prin A şi este paralelă cu dreapta (1) este: $y = \frac{2}{\beta}(x - a)$, (2)

4° Ecuaţia dreptei MF este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

sau dezvoltînd:

$$\beta x + (1 - \alpha)y - \beta = 0. \tag{3}$$

5° Locul lui N se află eliminînd pe α și β între (2), (3) și relația $\beta^2 = 4\alpha$, (4)
(punctul M se află pe parabolă).

Din (2) se scoate $\beta = \dfrac{2(x-a)}{y}$ și se introduce în (3) obținînd $\alpha = \dfrac{2(x-a)(x-1)+y^2}{y^2}$.

Înlocuind apoi pe α și β în (4) se obține cercul

$$x^2 + y^2 - 2x - a^2 + 2a = 0. \qquad (5)$$

Introducînd în (5) coordonatele lui A se verifică imediat că A se află pe cerc.

Centrul cercului (5) este în $C(1, 0)$, adică în focarul parabolei, iar raza $r = a - 1$ adică $r = FA$.

6° Tangenta în A la cerc este dreapta $x = a$, ceea ce se putea prevedea, căci centrul cercului este pe Ox.

43. Fie o parabolă cu vîrful în originea axelor de coordonate, tangentă la Oy și care trece printr-un punct M variabil al curbei (C): $xy = a^2$.

1° Considerînd triunghiul format de punctul M și de punctele A și B în care tangentele în M la cele două curbe taie axa Ox, să se studieze variația ariei sale, cînd M descrie curba C.

2° Să se afle locul geometric al ortocentrului triunghiului de la 1°.

3° Dacă M' și M'' sînt punctele în care o secantă fixă oarecare trecînd prin origine, taie cercul circumscris triunghiului MAB, să se arate că produsul $OM' \cdot OM''$ are o valoare constantă, cînd M se deplasează pe curba C.

R. 1° Considerăm parabola $y^2 = 2px$ și punctul $M\left(\alpha, \dfrac{a^2}{\alpha}\right)$ un punct variabil pe (C).

Ecuația tangentei în M la (C) este de forma $xx_0 + yy_0 = 2a^2$ sau după înlocuire $\dfrac{a^2}{\alpha}x + \alpha y =$ $= 2a^2$; se pune condiția ca parabola să treacă prin M și se scrie apoi tangenta în M la parabolă. Rezultă ușor apoi punctele $A(2\alpha, 0)$, $B(-\alpha, 0)$, aria triunghiului ABM fiind $S = \dfrac{3a^2}{2} =$ constant.

2° Ortocentrul H are coordonatele $x = \alpha$ și $y = \dfrac{2\alpha^3}{a^2}$, locul lui H fiind cubica $y = \dfrac{2}{a^2}x^3$.

3° Cercul ce trece prin A, B, M are ecuația

$$x^2 + y^2 - \alpha x + \frac{2\alpha^2 - a^4}{a^2\alpha}y - 2\alpha^2 = 0$$

și intersectînd acest cerc cu dreapta $y = mx$ se obțin coordonatele punctelor M', M''.

Rezultă apoi $OM' \cdot OM'' = -2\alpha^2$.

44. Fie A și B două puncte situate pe o parabolă cu vîrful O; proiectăm punctele A, B în A', B' pe tangenta în vîrf la parabolă.

1° Fie I simetricul vîrfului O față de focarul F și C' mijlocul segmentului $A'B'$. Să se arate că dreptele AB, $C'I$ sînt perpendiculare.

2° Dacă punctele A, B sînt mobile pe parabolă, iar intersecția dreptei AB cu tangenta în vîrf, este un punct fix, să se arate că intersecția dreptelor AB', $A'B$ descrie o dreaptă care trece prin vîrful O.

R. 1° Se poate considera parabola $y^2 - 2px = 0$ şi punctele $A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$ $I(p, 0)$ $A'(0, y_1)$, $B'(0, y_2)$ şi $C'\left(0, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ acesta fiind mijlocul segmentului $A'B'$. Se arată uşor că $m_{AB} \cdot m_{c'I} + 1 = 0$.

2° Fie punctul fix $P(0, k)$; dreapta PAB are ecuaţia $y - k = \lambda x$; unde λ este un parametru variabil real. Coordonatele punctelor A şi B se află rezolvînd sistemul format din ecuaţia dreptei PAB şi aceea a parabolei date; se scriu apoi ecuaţiile dreptelor $A'B$, AB' şi se determină coordonatele punctului M de intersecţie a acestor 2 drepte:

$$x_M = \frac{k^2}{2(p - \lambda k)}, \quad y_M = \frac{pk}{p - \lambda k}.$$

Eliminarea lui λ între aceste 2 relaţii conduce la ecuaţia locului căutat, care este dreapta $2px - ky = 0$.

45. Într-un sistem de axe perpendiculare se consideră parabola $(P): y^2 = 2x$.

1° Să se exprime abscisele punctelor de intersecţie ale acestei parabole cu cercurile $C_{(a, b)}$ de ecuaţie $x^2 + y^2 + 2ax + b = 0$.

Ce relaţie trebuie să existe între a şi b pentru ca un cerc $C'_{(a, b)}$ să fie bitangent la (P)? Să se scrie această ecuaţie sub forma $b = f(a)$.

Presupunînd că cercurile $C_{(a)}: x^2 + y^2 + 2ax + f(a) = 0$ sînt bitangente, ce inegalitate trebuie să verifice a pentru ca punctele de contact să existe efectiv?

2° Să se scrie ecuaţia abscivelor punctelor de intersecţie ale lui (P) cu cercurile $D_{(m)}: x^2 + y^2 + 2mx = 0$. Ce se poate spune despre punctul de intersecţie fix? Să se găsească cercul comun al celor două familii $C_{(a)}$ şi $D_{(m)}$.

R. 1° Abscisele comune cercurilor $C_{a, b}$ şi parabolei (P) sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 2(a + 1)x + b = 0$. Condiţia ca $C_{(a, b)}$ să fie bitangent parabolei (P) este $b = \pm(a + 1) = f(a)$. Din $x^2 + y^2 + 2ax + f(a) = 0$ şi $y^2 = 2x$ rezultă $x^2 + 2(a + 1)x \pm (a + 1) = 0$. Punînd condiţia ca discriminantul acestei ecuaţii să fie $\geqslant 0$, rezultă inegalităţile $a(a + 1) \geqslant 0$ şi $(a + 1)(a + 2) \geqslant 0$, de unde $a(\in -\infty, -2) \cup [0, \infty) \cup \{-1\}$.

2° Ecuaţia abscivelor curbelor $D_{(m)}$ şi P este $x^2 + 2(m + 1)x = 0$, punctul fix de intersecţie fiind originea axelor de coordonate. Cercul comun familiilor de cercuri $x^2 + y^2 + 2mx = 0$ şi $x^2 + y^2 + 2ax \pm (a + 1) = 0$ este $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

46. Fie $y^2 = 2px$ ecuaţia unei parabole cu vîrful în originea axelor de coordonate. Dintr-un punct M variabil pe parabolă se duce o perpendiculară MP pe tangenta în O la parabolă. Se notează cu D intersecţia directoarei cu axa parabolei, se uneşte P cu focarul F şi cu D, apoi se duce perpendiculara PQ pe OM. Se cere:

1° Locul geometric al punctului de întîlnire al dreptelor PF şi OM.

2° Locul geometric al punctului de întîlnire a dreptelor PD şi OM.

3° Locul geometric al punctului Q.

R. Se ia $M(\alpha, \beta)$, un punct variabil pe parabolă, ecuaţiile dreptelor PF şi OM sînt: $2\beta x + py - \alpha p = 0$ şi $\beta x - \alpha y = 0$.

Locul intersecţiei (PF, OM) este elipsa

$$4x^2 + y^2 - 2px = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{\left(\frac{p}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{2}\right)^2} - 1 = 0;$$

locul intersecției (PD, OM) este hiperbola

$$4x^2 - y^2 - 2px = 0, \text{ sau } \frac{x^2}{\left(\frac{p}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{2}\right)^2} - 1 = 0$$

iar locul geometric al punctului Q este cercul

$$x^2 + y^2 - 2px = 0.$$

47. Se dau dreapta $(D): x + 2y - \alpha = 0$ și curba $(C): 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$; se cere:

1° Să se determine α astfel ca dreapta (D) să fie tangentă la curba (C).

2° α fiind astfel determinat, să se scrie ecuația tangentei la (C), paralelă cu dreapta (D) și să se arate că produsul distanțelor de focare ale acestor tangente este același.

3° Știind că dreapta (D) este tangentă și la parabola $y^2 - 2px = 0$, să se determine parametrul p.

4° Tangenta la această parabolă în $P(\alpha, \beta)$ taie axa Oy în M; se cere locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OPM.

R. 1° Scriind că sistemul format din ecuația dreptei (D) și a cercului (C) are soluții confundate, se obține $\alpha = \pm 4$. Pentru cele 2 valori ale lui α corespund dreptele $x + 2y \pm 4 = 0$.

2° Produsul distanțelor celor 2 focare ale elipsei, la dreptele (D) este același $d_1 \cdot d_2 = 3 = b^2$, unde b este semiaxa mică a elipsei.

3° $p = -2$.

4° Tangenta în $P(\alpha, \beta)$ la parabolă are ecuația $\beta y = -2(x + \alpha)$, iar punctul M are coordonatele $x = 0$ și $y = -\frac{2\alpha}{\beta}$.

Locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OPM este parabola $y^2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$, cu vîrful în $(-1, 0)$.

48. În planul axelor rectangulare xOy se ia un punct fix $A(0, a)$, prin care se duce o secantă variabilă ce intersectează pe xx' în M. Prin M se duce o perpendiculară pe AM, care întîlnește pe yy' în N. Se cere:

1° Locul geometric al centrului de greutate G a triunghiului AMN, cînd secanta ce trece prin A se rotește în jurul acestui punct. Să se construiască acest loc.

2° Care este locul geometric al lui G' obținut asemănător cu G, dacă în locul punctului A se consideră punctul $B(a, 0)$?

3° Ce legătură există între cele două locuri geometrice determinate la pct. 1° și 2°?

R. 1° Locul geometric al punctului G este parabola $y = -\frac{3}{a}x^2 + \frac{a}{3}$. 2° Locului lui G' este parabola $x = -\frac{3}{a}y^2 + \frac{a}{3}$. 3° Graficele celor două locuri sînt simetrice în raport cu prima bisectoare a axelor de coordonate, observînd că cea de a doua funcție este inversa primei funcții.

49. Pe parabola $y^2 = 2px$ se consideră punctele A, B, C de ordonate a, b, c. Punctele A', B', C' sînt vîrfurile unui triunghi formate de tangentele în A, B, C la parabolă. Se cere:

1° Coordonatele punctelor A', B', C'.

2° Aria triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$, stabilindu-se şi relaţia ce există între aceste două arii.

3° Notînd cu G şi G' centrele de greutate ale celor două triunghiuri, să se arate că dreapta GG' este paralelă cu axa parabolei.

4° Pe dreapta GG se ia un punct P astfel ca $\frac{GP}{PG'} = \frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } A'B'C'}$. Să se arate că punctul P este pe parabolă.

R. 1° $A'\left(\frac{bc}{2p}, \frac{b+c}{2}\right)$ $B'\left(\frac{ac}{2p} \frac{a+c}{2}\right)$, $C'\left(\frac{ab}{2p}, \frac{a+b}{2}\right)$.

2° Aria $(ABC) = \left|\frac{1}{4p}(a-b)(b-c)(c-a)\right|$, aria $(A'B'C') = \frac{1}{2}$ aria (ABC).

3° $G\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6p}, \frac{a+b+c}{3}\right)$, $G'\left(\frac{ab+bc+ca}{6p}, \frac{a+b+c}{3}\right)$ şi $m_{GG'} = 0$.

4° $x_P = \frac{(a+b+c)^2}{18p}$, $y_P = \frac{a+b+c}{3}$.

BIBLIOGRAFIE

Aramă L., Morozan T., *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral* — vol. I — București, Editura tehnică, 1967.

Bouligand G. et Rivaud J., *L'enseignement des mathématiques générales par les problèmes*, Paris, Librairie Vuibert, 1968.

Combes A., *Exercices et problèmes des mathématiques*, tome 1, Paris, Librairie Vuibert, 1966.

Combes A. et Barques D., *Exercices et problèmes des mathématiques*, tome 1, Paris, Librairie Vuibert, 1973.

Coșniță C. și Turtoiu F. — *Culegere de probleme de analiză matematică* — București. Editura tehnică, 1962.

Coșniță C. și Turtoiu F. — *Culegere de probleme de algebră*. București, Editura tehnică, 1972.

Coșniță C. și Turtoiu F. — *Culegere de probleme de matematică*, București, Editura tehnică, 1969.

Donciu N., Flondor D., Simionescu Gh. — *Algebră și analiză matematică — Culegere de probleme*, vol. I, București, Editura didactică și pedagogică, 1967.

Drăghicescu D., Leonte Al., Vraciu G. — *Ghid de pregătire la matematică*, Craiova. Editura Scrisul Românesc, 1976.

Ghiunter M. N. și Cuzmin O. R., - *Culegere de probleme de matematici superioare*, vol. I, București, Editura tehnică, 1953.

Kusch L. und Rosenthal J. H., *Mathematik für Schule und Beruf, Teil III, Differential — rechnung*, Essen, Verlag W. Girardet, 1963.

Laine E., *Exercices de calcul differentiel et integral*, Paris, Libraire Vuibert, 1964.

Leontin A. et Rivaud J. — *Leçons d'algèbre moderne*, Paris, Librairie Vuibert, 1964.

Rivaud J. — *Exercices d'analyse* — tome I, Paris, Librairie Vuibert, 1966.

Rivaud J. — *Exercices d'algèbre* — tome I, Paris, Librairie Vuibert, 1966.

Roșculeț M., Popescu O. — *Probleme de analiză matematică*, București, Editura didactică și pedagogică, 1971.

Sirețchi Gh. — *Analiză matematică*, vol. II, București, Tipografia Universității București, 1977.

Gazeta matematică, Seria B, 1960—1977.

CUPRINS

Coli de tipar 15,500. B.T. 22.12.1980.
Format 16/70×100. Apărut 1981.

I. P. „Oltenia“ Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România

Plan 6 194/1/1981.

